

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI  
**Autor:** Capitanio, Gianmarco  
**Kapitel:** 1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

### 1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient  $X$  un espace topologique,  $D^n$  un disque de dimension  $n$ , orienté, et  $\psi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$  une application. On considère sur  $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$  l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension  $n$  le couple  $\sigma^n := (D^n, \psi)$ . L'espace que l'on construit en identifiant chaque point  $x$  de  $\mathbf{S}^{n-1}$  au point  $\psi(x)$  est obtenu *en attachant à  $X$  la cellule  $\sigma^n$* ; on le note  $X \cup \sigma^n$  ou bien  $X \cup_{\psi} D^n$ .

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire  $X$  est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit  $X$  un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension  $k \leq n$  est appelée *squelette cellulaire* de dimension  $n$ , que l'on note  $X^n$ . On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \cdots \subset X^k \subset \cdots \subset X.$$

L'espace quotient  $X^{k-1}/X^{k-2}$ , où  $X^{k-2}$  est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension  $k-1$ . Considérons une cellule  $\sigma^k = (D^k, \psi)$  et l'application

$$\widetilde{\psi}_i: \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\psi} X^{k-1} \xrightarrow{\text{Id}} X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{S}_i^{k-1},$$

où  $\pi_i$  est la projection sur la  $i$ -ème sphère du bouquet. Soit  $\sigma_i^{k-1}$  la cellule de  $X$  correspondant à la sphère  $\mathbf{S}_i^{k-1}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules  $\sigma^k, \sigma_i^{k-1}$  le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\widetilde{\psi}_i).$$

Soient  $E = \mathbf{R}^K$  et  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse excellente<sup>1)</sup>, avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

<sup>1)</sup> Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique  $\bar{\xi}$  de  $f$ , il existe un système de coordonnées  $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$  tel que :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \dots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_K^2.$$

Le nombre  $k$ , dénoté par  $\text{ind}(\bar{\xi})$ , est l'*indice* du point critique  $\bar{\xi}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\}.$$

THÉORÈME 1.1 ([Mil]). *Si l'intervalle  $[a, b]$  ne contient aucune valeur critique de  $f$ , alors  $E^b$  et  $E^a$  sont difféomorphes.*

THÉORÈME 1.2 ([Mil]). *Soient  $c$  la seule valeur critique dans l'intervalle  $[c - \epsilon, c + \epsilon]$  et  $\bar{\xi}$  le point critique correspondant, d'indice  $\text{ind}(\bar{\xi}) = i$ . Alors  $E^{c+\epsilon}$  et  $E^c$  se rétractent sur l'espace  $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$  que l'on obtient de  $E^{c-\epsilon}$  en attachant à son bord une cellule  $\sigma^i = (D^i, \psi)$  de dimension  $i$ .*

Pour  $\xi, \eta$  points critiques de  $f$ , tels que  $\text{ind}(\xi) - \text{ind}(\eta) = 1$ , on note  $[\xi : \eta]$  l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

REMARQUE. Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée: toute suite  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  telle que  $\nabla f(\xi_n) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$  et  $\{f(\xi_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit  $b > 0$  un nombre réel assez grand pour que l'intervalle  $] -b, b [$  contienne toutes les valeurs critiques de  $f$ . On déduit du Théorème 1.1 que  $E^\lambda \simeq E^{-b}$  pour  $\lambda \leq -b$  et  $E^\lambda \simeq E^b$  pour  $\lambda \geq b$ . On note alors  $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$ .

Soit  $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$  l'ensemble des points critiques d'indice  $k$  de  $f$ , ordonnés selon leur valeur critique:  $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$ .

DÉFINITION. Le *complexe de Morse* de  $f$  est le complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ , défini comme suit :

- l'espace  $M_k^f$  des chaînes de dimension  $k$  est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur  $\mathbf{Q}$  des points critiques d'indice  $k$  de  $f$  :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \xi_\ell^k \mid \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)};$$

- l'opérateur de bord<sup>2)</sup> est l'application linéaire  $\partial: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  définie par la formule

$$\partial \xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \xi_m^{k-1}.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace  $E/E^{-\infty}$  est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}),$$

où  $\tilde{H}_*$  dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans  $\mathbf{Q}$ .

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut “diagonaliser” les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur  $\mathbf{Q}$ , bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÉBRIQUE ([Bar]). *Dans chaque  $M_k^f$  il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension  $\#(k)$ , qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés)  $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$  ( $\ell = 1, \dots, \#(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) vérifient*

$$(1) \quad \partial \Xi_\ell^k = 0 \quad \text{ou} \quad \partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}.$$

*Démonstration.* Par récurrence : supposons que les générateurs  $\Xi_j^h$  soient du type (1) pour  $h = k$  et  $j \leq \ell$ , et pour  $h < k$  et  $j \in \{1, \dots, \#(h-1)\}$ . Soit  $Q$  l'ensemble des indices  $q$  tels que  $\Xi_q^{k-1} = \partial \Xi_{q^*}^k$  pour quelque  $q^* \leq j$ , et  $P := \{1, \dots, \#(k-1)\} \setminus Q$ . L'égalité  $\partial \Xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \Xi_m^{k-1}$  s'écrit donc

$$\partial \left( \Xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \sum_{p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

Si  $\alpha_p = 0$  pour tout  $p \in P$ , le générateur  $\Xi_{j+1}^k := \Xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k$  est canonique, en effet  $\partial \Xi_{j+1}^k = 0$ . Sinon, soit  $p_0$  le plus grand indice dans  $P$  tel que  $\alpha_{p_0} \neq 0$  :

$$(2) \quad \partial \left( \Xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \alpha_{p_0} \Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

<sup>2)</sup> Pour la démonstration du fait que  $\partial^2 = 0$ , voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur  $\Xi_{p_0}^{k-1}$  par  $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$ , qui est encore de la forme (1), car  $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$ . L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} ;$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie  $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$ .  $\square$

### REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces  $M_k^f$  on peut définir un autre opérateur de bord  $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où  $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs  $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$  de  $\xi_\ell^k$  à  $\xi_m^{k-1}$ . Puisque l'attachement des cellules  $\sigma_\ell^k$  est induit par la rétraction des espaces  $E^\lambda$  le long des trajectoires intégrales de  $Y$ , on a  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de  $Y$  entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes  $(M_*^f, \partial_*)$  et  $(M_*^f, \delta_*)$  ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit  $(M_*^f, \partial_*)$  le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ . A chaque point critique  $\xi_\ell^k$  correspond le générateur  $\Xi_\ell^k$ , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

DÉFINITION. On dit que deux points critiques  $\xi_\ell^k$  et  $\xi_m^{k-1}$  de  $f$  sont *incident* si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ , *liés* si  $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$ . Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.

DÉFINITION. On appelle *diagramme (du complexe) de Morse* la représentation suivante du complexe de Morse de  $f$ . On considère  $K + 1$  axes réels verticaux (avec la même échelle et l'origine à la même hauteur), numérotés, de gauche à droite, de  $K$  à 0. Sur le  $i$ -ème axe on considère les points critiques de  $f$  d'indice  $i$ , disposés selon leur valeur critique. On joint par un segment en tirets les couples de points critiques incidents, par un segment continu les couples de points critiques liés (cf. Figure 1).

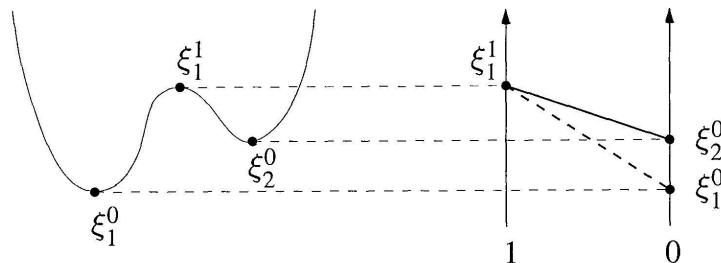


FIGURE 1  
Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto \xi^4 - \xi^2 + \xi$

REMARQUES. Considérons un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ .

- (1) Les segments qui ont  $\xi_\ell^k$  comme extrémité sont tous du même côté de l'axe où se trouve  $\xi_\ell^k$ , car  $\partial^2 = 0$ .
- (2) Les segments (orientés du point d'indice plus grand vers celui d'indice plus petit) ont tous pente négative, car si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  alors  $f(\xi_\ell^k) > f(\xi_m^{k-1})$ .
- (3) Un point critique peut être une extrémité de plusieurs segments en tirets, mais d'un seul segment continu (au plus).

PROPOSITION 1.3. Soit  $(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  un couple de points critiques liés. Alors  $\xi_m^{k-1}$  est le point critique de valeur critique maximale parmi les points critiques incidents à  $\xi_\ell^k$  tels que  $[\xi_j^k : \xi_m^{k-1}] = 0$  pour tout  $j < \ell$ ;  $\xi_\ell^k$  est le point critique de valeur critique minimale parmi les points critiques incidents à  $\xi_m^{k-1}$  tels que  $[\xi_\ell^k : \xi_j^{k-1}] = 0$  pour tout  $j > m$ .

PROPOSITION 1.4. Un point critique  $\xi$  est libre si et seulement si pour tout point critique  $\eta$  incident à  $\xi$ , il existe un point critique  $\xi'$ , incident à  $\eta$ , tel que

$$|f(\xi') - f(\eta)| < |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Les deux propositions sont une conséquence immédiate du choix de l'indice  $p_0$  dans la preuve du lemme algébrique.

**PROPOSITION 1.5.** *Deux points critiques de  $f$  liés le sont aussi en tant que points critiques de  $-f$ .*

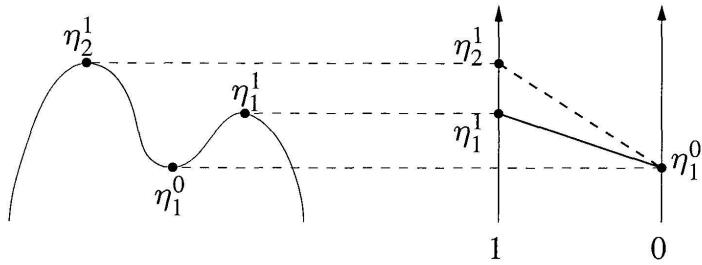


FIGURE 2  
Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto -(\xi^4 - \xi^2 + \xi)$

*Démonstration.* Un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ , d'indice  $k$ , est un point critique de  $-f$ , d'indice  $K - k$ . Soit  $c := f(\xi_\ell^k)$ ; d'après le Théorème 1.2 on a

$$E_f^{c+\epsilon} \simeq E_f^{c-\epsilon} \cup \sigma_\ell^k, \quad E_{-f}^{-c+\epsilon} \simeq E_{-f}^{-c-\epsilon} \cup \tau_m^{K-k}.$$

Or, puisque  $\partial\sigma_\ell^k$  et  $\partial\tau_m^{K-k+1}$  sont enchaînées, on a  $[\sigma_j^i, \sigma_h^{i-1}] = \pm[\tau_h^{K-i+1}, \tau_j^{K-i}]$  (voir [DNF], vol. III, § 18). Il s'ensuit que les complexes de Morse de  $f$  et de  $-f$  ont les mêmes couples de points critiques incidents. Puisque l'on obtient le complexe de  $-f$  de celui de  $f$  par une symétrie qui ne change pas la pente des segments (cf. Figure 2), la proposition précédente entraîne que les couples de points critiques liés sont les mêmes.  $\square$

### 1.3 LE NIVEAU CRITIQUE DE MINIMAX

Soit maintenant  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , quadratique à l'infini, c'est-à-dire  $f(\xi) = Q_\infty(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand, où  $Q_\infty$  est une forme quadratique non dégénérée d'indice  $k_\infty$ . On ne suppose pas nécessairement que  $f$  soit de Morse excellente. Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  considérons la famille d'inclusions naturelles  $i_\lambda: E^\lambda \hookrightarrow E$ , qui induit les homomorphismes  $i_\lambda^*: \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \rightarrow \tilde{H}_*(E^\lambda, E^{-\infty})$  des groupes d'homologie relative réduite à valeurs en  $\mathbf{Q}$ .

Comme  $f$  est quadratique à l'infini, on a

$$\tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(\mathbf{S}^{k_\infty}).$$

Soit  $\Gamma$  un générateur de  $\tilde{H}_{k_\infty}(E, E^{-\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .

DÉFINITION. On appelle *minimax* de  $f$  le nombre réel

$$\min \max(f) := \inf \{ \lambda \in \mathbf{R} \mid i_\lambda^* \Gamma \neq 0 \}.$$

REMARQUE. Puisque la topologie des niveaux change au passage de ce niveau, le minimax est une valeur critique de  $f$ .

Dans le cas des fonctions de Morse excellentes, on peut caractériser le minimax d'une fonction en utilisant la classification de ses points critiques donnée au § 1.2.

THÉORÈME 1.6. *Si  $f$  est une fonction de Morse excellente, quadratique à l'infini, elle admet un seul point critique libre, d'indice  $k_\infty$ , et le minimax de  $f$  est le niveau critique réalisé par ce point.*

*Démonstration.* Soit  $\xi$  un point critique de  $f$ ,  $\Xi$  le générateur correspondant du complexe de Morse en forme canonique. Alors  $\xi$  est libre si et seulement si

$$\partial \Xi = 0 \quad \text{et} \quad \Xi \notin \partial M^f,$$

c'est-à-dire si et seulement si  $\Xi$  est le représentant d'une classe  $[\Xi]$  non nulle dans  $H_*(M^f, \partial)$ . D'après l'isomorphisme  $\widetilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(M_*^f, \partial_*)$  on déduit qu'il existe un seul générateur  $\Xi_\ell^{k_\infty}$  tel que  $[\Xi_\ell^{k_\infty}]$  est bien définie et non nulle dans  $H_*(M_*^f, \partial_*)$ . Par conséquent,  $f$  a un seul point critique libre, d'indice  $k_\infty$ , et le minimax de  $f$  est réalisé par ce point.  $\square$

Pour pouvoir utiliser cette caractérisation du minimax il faut se ramener au cas des fonctions de Morse excellentes, c'est-à-dire des fonctions génériques. Pour cela il suffit de “déformer” un peu notre fonction.

DÉFINITION 1.7. Une *déformation* de  $f$  est un élément  $g$  de  $C^2(\mathbf{R}^K; \mathbf{R})$  tel que  $g(\xi) = f(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand. Une *petite déformation* de  $f$  est une déformation proche de  $f$  pour la norme  $C^2$ .

THÉORÈME 1.8. *Le minimax est stable par petites déformations de  $f$ .*

*Démonstration.* Soient  $c_1 < \dots < c_r$  les valeurs critiques de  $f$ ,  $\epsilon > 0$  fixé, assez petit pour que  $c_i + \epsilon < c_{i+1} - \epsilon$  pour tout  $i = 1, \dots, r-1$ . Si  $g$  est une déformation de  $f$  assez petite, ses valeurs critiques sont contenues dans la réunion des ensembles  $]c_i - \epsilon, c_i + \epsilon[$  (cf. Figure 3).

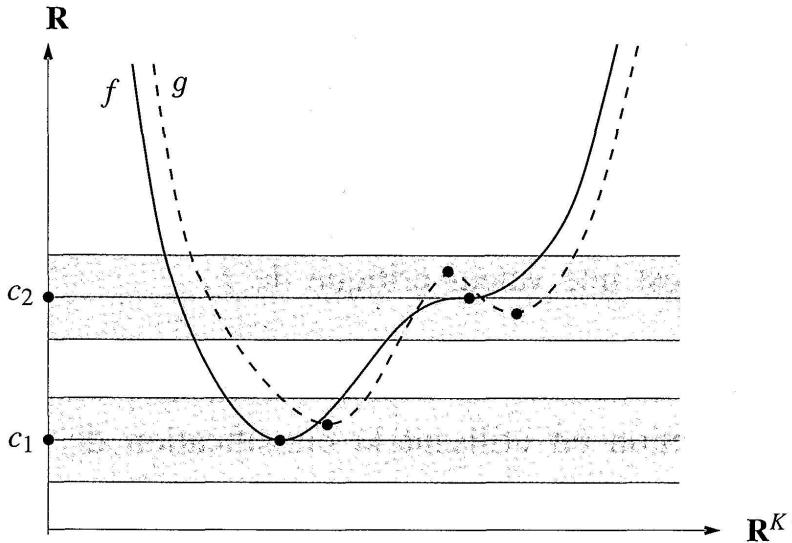


FIGURE 3

Petite déformation qui rend générique une fonction non de Morse

Par conséquent, pour tout  $i$ , les ensembles  $E^{c_i+\epsilon}$  et  $E_g^{c_i+\epsilon}$  sont difféomorphes, aussi bien que les ensembles  $E^{c_i-\epsilon}$  et  $E_g^{c_i-\epsilon}$ . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(E^{c_i+\epsilon}) \simeq \tilde{H}_*(E_g^{c_i+\epsilon}), \quad \tilde{H}_*(E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E_g^{-\infty}).$$

Si on pose

$$\begin{aligned} A_k &:= H_k(E^{-\infty}), & B_k &:= \tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}), & C_k &:= \tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}), \\ A'_k &:= H_k(E_g^{-\infty}), & B'_k &:= \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}), & C'_k &:= \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}), \end{aligned}$$

on a les suites exactes longues en homologie relative:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & A_k & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & A_{k-1} \longrightarrow B_{k-1} \dots \\ & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \star \downarrow & & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq \\ \dots & A'_k & \longrightarrow & B'_k & \longrightarrow & C'_k & \longrightarrow & A'_{k-1} \longrightarrow B'_{k-1} \dots \end{array}$$

Le "lemme des cinq" bien connu entraîne que la flèche  $\star$ . est aussi un isomorphisme:  $\tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty})$ . Si on note  $u = c_\ell$  le minimax de  $f$ , il en résulte que

$$\tilde{H}_{k_\infty}(E_g^{u+\epsilon}, E_g^{-\infty}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{H}_{k_\infty}(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell - 1,$$

donc le minimax de  $g$  appartient à l'ensemble  $[u - \epsilon, u + \epsilon]$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

Le minimax de  $f$  admet la construction "duale" naturelle suivante. Soient  $\check{E}^c := E_{-f}^{-c}$ ,  $j_\lambda: \check{E}^\lambda \hookrightarrow E$  la famille d'inclusions naturelles et  $\Delta$  un générateur de  $\tilde{H}_{K-k_\infty}(E, \check{E}^{+\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .

DÉFINITION. On appelle *max-min* de  $f$  le nombre

$$\max \min(f) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid j_\lambda^* \Delta \neq 0\} = -\min \max(-f).$$

THÉORÈME 1.9. *Le minimax de  $f$  coïncide avec le max-min.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.8 on peut supposer  $f$  générique, donc de Morse excellente. Alors on déduit de la Proposition 1.5 que  $f$  et  $-f$  ont le même point critique libre.  $\square$

Le résultat suivant sera utile plus loin.

PROPOSITION 1.10. *Soit  $f$  une fonction excellente,  $\bar{\xi}$  un point critique dégénéré de  $f$ , de valeur critique  $c := f(\bar{\xi})$ . Supposons que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe deux déformations  $g, h$  de  $f$  telles que :*

- (i)  $g$  et  $h$  sont  $\epsilon$ -proches de  $f$  ;
- (ii)  $g$  n'a aucune valeur critique dans  $]c - \epsilon, c + \epsilon[$  ;
- (iii)  $h$  a deux valeurs critiques,  $c_1 = f(\bar{\xi}_1)$  et  $c_2 = f(\bar{\xi}_2)$  dans  $]c - \epsilon, c + \epsilon[$ , telles que  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont non dégénérés.

Alors  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont liés.

Démonstration. Le même argument que pour la preuve du Théorème 1.8 (où l'on considère  $E^{c-\epsilon}$  au lieu de  $E^{-\infty}$ ) montre que

$$\tilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) \simeq \tilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}).$$

Or, d'après le Théorème 1.2, on a  $\tilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}) = 0$ . Par conséquent  $\tilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) = 0$ , c'est-à-dire  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont incidents. Il s'ensuit que  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont liés (Proposition 1.3).  $\square$

## 2. LA SOLUTION DE MINIMAX

### 2.1 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit  $X$  une variété différentielle de dimension  $n$ ,  $T^*X = \{(x; y)\}$  le fibré cotangent<sup>3)</sup> de  $X$ ,  $\pi: T^*X \rightarrow X$  la projection naturelle  $(x, y) \mapsto x$ . Le fibré  $T^*X$ , muni de la forme symplectique canonique  $dy \wedge dx$ , est une variété symplectique de dimension  $2n$ .

<sup>3)</sup> Pas nécessairement trivial.