11. Le cas $x < 0$

Les résultats de Nagell et Ljunggren mentionnés au paragraphe 2 sont plus généraux que le Théorème 1, car ils incluent la résolution de (1) pour $x < 0$. Comme il est expliqué dans [18], ce problème revient à résoudre l'équation

$$\frac{x^n+1}{x+1} = y^q, \quad \text{en entiers } x > 1,\ y > 1,\ n \geq 3 \text{ impair},\ q \geq 2\,, \tag{12}$$

qui possède la solution $(x, y, n, q) = (19, 7, 3, 3)$. Il s'agit d'ailleurs de l'unique solution avec $n = 3$ ou 4 [36, 37, 31]. Il est tentant de conjecturer qu'il s'agit là de l'unique solution de (12), mais nous sommes loin de pouvoir le démontrer. Cependant, nous avons plusieurs résultats partiels, qui vont dans le sens de cette conjecture.

Les méthodes utilisées lors de l'étude de l'équation (1) s'appliquent également à (12), et permettent de démontrer les résultats suivants. En outre, de nouvelles estimations [11] ont permis de considérablement réduire le temps de calcul [18].

Théorème 18. *Si l'équation (12) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p-1$. En particulier, on a $x \geq 2q+1$. L'équation (12) n'a pas de solution (x, y, n, q) avec $2 \leq x \leq 10^4$ et $n \geq 5$.*

Le cas particulier $x = 2$ est traité dans [12], l'équation correspondante intervenant dans la classification des groupes finis simples.

12. Applications

La question suivante apparaît en théorie des groupes finis et est fortement liée à l'équation (1): trouver des nombres premiers P et Q et des entiers rationnels $n \geq 3$ et $a \geq 1$ tels que

$$\frac{Q^n - 1}{Q - 1} = P^a\,.$$

Plusieurs travaux y font référence, notamment [12, 23, 29, 49] et [40, page 121]. Observons que l'équation (12) possède également des liens avec la théorie des groupes finis [12].

Une autre application concerne l'irrationalité de nombres réels dont le développement décimal est de la forme suivante. Soient $g \geq 2$ et $h \geq 2$ des entiers. Pour tout entier $m \geq 1$, on définit $(m)_h = a_1 \dots a_r$ la suite des chiffres de m dans son écriture en base h, i.e. $m = a_1 h^{r-1} + \dots + a_r$, avec $a_1 > 0$ et $0 \leq a_i < h$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour une suite $(n_i)_{i \geq 1}$ d'entiers positifs ou nuls, on pose

$$a_h(g) = 0.(g^{n_1})_h (g^{n_2})_h \dots$$

Il est établi que $a_h(g)$ est irrationnel si la suite $(n_i)_{i \geq 1}$ est non bornée (voir par exemple [41]), et Sander [41] a étudié le cas où cette suite est bornée et admet exactement deux éléments qui apparaissent une infinité de fois. Son Theorem 3 repose sur une application incorrecte d'un résultat de [47] et n'est à ce jour pas démontré. Cependant, comme il est expliqué par exemple dans [19], les Théorèmes 12 et 13 permettent de montrer l'irrationalité de nombres $a_h(g)$ sous les hypothèses considérées par Sander.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER, A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. *Mathematika 12* (1966), 204–216.

[2] —— A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms I–III. *Acta Arith. 21* (1972), 117–129; *24* (1973), 33–36; *27* (1975), 247–252.

[3] BAKER, A. and G. WÜSTHOLZ. Logarithmic forms and group varieties. *J. reine angew. Math. 442* (1993), 19–62.

[4] BENNETT, M. Rational approximation to algebraic number of small height: The diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *J. reine angew. Math. 535* (2001), 1–49.

[5] BENNETT, M. and B. M. M. DE WEGER. On the Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *Math. Comp. 67* (1998), 413–438.

[6] BILU, Y. Solving superelliptic Diophantine equations by the method of Gelfond–Baker. Preprint 94–09, Mathématiques Stochastiques, Univ. Bordeaux 2 (1994).

[7] BILU, Y. and G. HANROT. Solving superelliptic Diophantine equations by Baker's method. *Compositio Math. 112* (1998), 273–312.

[8] BUGEAUD, Y. Sur la distance entre deux puissances pures. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322* (1996), 1119–1121.

[9] —— Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 127* (1999), 373–381.

[10] —— On the Diophantine equation $a\,\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Proceedings of the Number Theory Conference held in Turku*, ed. M. Jutila and T. Metsänkylä, 19–24. De Gruyter, 2001.

[11] —— Linear forms in two p-adic logarithms and applications to Diophantine problems. *Compositio Math.* (à paraître).