

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 48 (2002)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DE NAGELL-LJUNGGREN $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$
Autor: Bugeaud, Yann / MIGNOTTE, Maurice
Kapitel: 8. Une extension du théorème de Nagell et Ljunggren
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-66071>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

prendre des valeurs arbitrairement grandes. Toutefois, une légère modification de l'argument précédent nous a permis [16, 18] de résoudre (9) et plus généralement de résoudre (1) pour tout x assez petit.

THÉOREME 13. *Si l'équation (1) possède une quatrième solution (z^t, y, n, q) , alors $z > 10000$ si $t \geq 1$, et $z > 10^6$ si $t = 1$.*

Pour démontrer ce résultat, on commence par appliquer le Théorème 12, et on se retrouve alors avec un petit nombre d'équations à traiter du type

$$\frac{z^m - 1}{z^t - 1} = y^q,$$

où q divise $\varphi(z)$, que l'on traite à l'aide de la méthode décrite dans [16].

8. UNE EXTENSION DU THÉOREME DE NAGELL ET LJUNGGREN

Le Théorème 5 affirme que (1) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) pour lesquelles n est divisible par un nombre premier p ; cependant, (1) n'est complètement résolue que dans le cas $p = 3$ (cf. Théorème 1). La méthode que nous présentons maintenant et qui fait l'objet de [14] permet d'étendre les résultats de Nagell et Ljunggren aux nombres premiers $p = 5, 7, 11$ et 13 , ainsi que de résoudre (1) pour certaines petites valeurs de p et q .

THÉOREME 14. *Si (x, y, n, q) est une éventuelle quatrième solution de (1) et si p est un diviseur premier impair de n , alors ou bien $p \geq 29$, ou bien $(p, q) \in \{(17, 17), (19, 19), (23, 23)\}$. En outre, on a $(p, q) \notin \{(29, 5), (29, 19), (29, 23), (31, 23), (37, 5), (37, 7), (37, 11), (67, 5)\}$, et si $q = 3$, alors $p \geq 101$.*

Nous indiquons maintenant les grandes lignes de la démonstration. Soient $p \geq 5$ un nombre premier et n un multiple de p . Le Théorème 3 entraîne que si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q) , alors l'une des équations

$$(10) \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = y^q, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = p y^q$$

admet une solution vérifiant $x \geq 2$. Il nous suffit donc de résoudre ces deux équations pour les couples (p, q) figurant dans l'énoncé du Théorème 14. Au premier abord, cela semble irréaliste car les bornes théoriques pour la taille des

solutions des équations superelliptiques $f(x) = ay^m$ sont très élevées, et, sauf dans certains cas bien particuliers *ad hoc*, l'ordinateur ne peut les résoudre dès que, disons, $m \times \deg(f)$ excède 20. Cependant, dans les deux exemples qui nous intéressent, le polynôme f est cyclotomique et possède ainsi de nombreuses propriétés que l'on peut exploiter, pourvu que p soit différent de q et que q ne divise pas le nombre de classes relatif du p -ième corps cyclotomique. Cette méthode, dont l'origine remonte à des travaux de Bilu [6] et Bilu et Hanrot [7], et qui a également été utilisée avec succès dans le cadre de l'équation de Catalan [13], permet de majorer x par une borne de l'ordre de $p^q q^{pq}$, et il suffit alors d'une simple énumération pour achever la résolution des équations (10).

Par ailleurs, un résultat classique de la théorie des équations diophantiennes exponentielles affirme que, pour les équations (10), on sait majorer q en fonction de p . Les bornes reposent entre autres sur des minoration de formes linéaires en ≥ 3 logarithmes, et sont de ce fait très élevées : supérieures à $(3p)^{10p}$ si l'on applique les meilleures estimations actuelles [8]. Or, grâce aux propriétés des polynômes cyclotomiques, il s'avère en fait possible de ne faire appel qu'à des formes linéaires en deux logarithmes pour borner q en fonction de p dans les équations (10) : on obtient alors par exemple $q \leq 5521$ pour $p = 5$, et $q \leq 9000p^2 \log^4 p$ pour tout p premier. Il ne reste alors plus qu'un nombre raisonnable de couples $(5, q)$ à traiter, pour lesquels on applique la méthode décrite dans le précédent paragraphe... si toutefois p n'est pas égal à q ! Dans le cas contraire, on se voit contraint d'utiliser les techniques développées par Bilu et Hanrot [7] et, malgré de multiples astuces de programmation, les capacités actuelles des ordinateurs ne nous permettent pas de résoudre (10) dès que $p = q \geq 17$.

9. AUTRES RÉSULTATS

On désigne par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier rationnel $n \geq 2$. Shorey [44, 45] a démontré des versions plus faibles des Théorèmes 8 et 9 (sa conclusion est la finitude du nombre de solutions et non la résolution complète), desquelles il a déduit de nouvelles informations relatives à (1). En examinant ses démonstrations, il s'avère que, grâce aux Théorèmes 8 et 9, on peut maintenant démontrer le résultat suivant.