

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	48 (2002)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	L'ÉQUATION DE NAGELL-LJUNGGREN $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$
<b>Autor:</b>	Bugeaud, Yann / MIGNOTTE, Maurice
<b>Kapitel:</b>	6. OÙ APPARAISSENT LES FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES $p$ -ADIQUES
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-66071">https://doi.org/10.5169/seals-66071</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Plus précisément, il ne reste à traiter que les équations

$$\begin{aligned} 5X^q - 4Y^q &= 1, & 17 \leq q \leq 71, \\ 6X^q - 5Y^q &= 1, & 17 \leq q \leq 67, \\ 7X^q - 8Y^q &= -1, & 17 \leq q \leq 61. \end{aligned}$$

Ce sont toutes des équations de Thue, dont on sait majorer explicitement la taille des solutions, et par conséquent *en principe*, les déterminer toutes. Or les meilleures bornes actuellement connues sont de l'ordre de  $10^{10^{500}}$ , donc bien trop élevées pour envisager une résolution complète. Qu'à cela ne tienne ! Comme, grâce à l'étape précédente, on sait que  $n$  est de la forme  $\nu q + 1$ , on cherche en fait à montrer que ces équations ne possèdent aucune solution  $(X, Y)$  avec  $X$  ou  $Y$  une puissance  $\nu$ -ième. On a donc une majoration de  $\nu$ , puis de  $n$ , de l'ordre de  $10^{500}$ . Pour conclure, on utilise à nouveau des arguments modulaires afin de montrer que  $n$  est nécessairement congru à 1 modulo un entier  $M$ , suffisamment grand (i.e.  $> 10^{500}$ ).

## 6. OÙ APPARAISSENT LES FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES $p$ -ADIQUES

Comme on l'a vu dans la partie 4, les formes linéaires de logarithmes permettent de minorer non trivialement la distance d'un produit de nombres algébriques à 1. On travaille alors avec la valeur absolue archimédienne, et on peut raisonnablement se demander si un énoncé du même style est valable pour les valeurs absolues  $p$ -adiques. La réponse est oui (cf. les travaux de Van der Poorten et de Kunrui Yu), et on déduit du résultat principal de [15] la minoration suivante pour la distance  $p$ -adique entre deux puissances de nombres rationnels.

**THÉORÈME 11.** *Soient  $p$  un nombre premier,  $x_1/y_1$  et  $x_2/y_2$  deux nombres rationnels non nuls et multiplicativement indépendants, que l'on suppose être des unités  $p$ -adiques. Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux entiers rationnels strictement positifs. Notons  $m = \max\{m_1, m_2, 2\}$  et désignons par  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ , deux nombres réels tels que  $H_i \geq \max\{|x_i|, |y_i|, 2\}$ . Alors, la valuation  $p$ -adique  $v_p(\Lambda)$  de*

$$\Lambda = \left( \frac{x_1}{y_1} \right)^{m_1} - \left( \frac{x_2}{y_2} \right)^{m_2}$$

*est majorée par*

$$v_p(\Lambda) \leq 2000 p \log H_1 \log H_2 \log^2 m.$$

Il convient de ne pas attacher trop d'importance au fait que la dépendance en  $m$  soit la même que dans [26], à savoir en  $\log^2 m$  et non en  $\log m$  comme dans (5). La raison principale est la suivante: comme les constantes numériques jouent un rôle très important pour la résolution pratique des problèmes, on s'attache tout particulièrement à les raffiner, même si cela se traduit par une légère perte au niveau de la dépendance en  $m$ .

Par ailleurs, le facteur  $p$  qui apparaît dans le membre de droite réduit le champ d'application du Théorème 11, qui, pour certaines questions, gagne à être remplacé par l'étude d'une forme linéaire de logarithmes archimédienne. Cependant, quand  $p$  est un nombre que l'on contrôle très bien, le Théorème 11 se révèle riche de conséquences, et il est en outre important de préciser que le facteur  $p$  disparaît et la constante numérique diminue si les deux rationnels sont  $p$ -adiquement proches de 1. C'est par exemple le cas pour l'équation diophantienne

$$(8) \quad \frac{10^{nt} - 1}{10^t - 1} = y^q, \quad \text{en entiers } q \geq 3, y \geq 2, t \geq 1, n \geq 3.$$

En effet, réécrivons (8) sous la forme

$$\frac{10^{nt}}{10^t - 1} = y^q - \left( \frac{1}{1 - 10^t} \right)^1 =: \Lambda,$$

et appliquons le Théorème 11 avec  $p = 5$ . On obtient alors

$$nt \leq c t \log y \log^2 q,$$

où  $c$  est une constante numérique, d'autant plus petite que  $t$  est grand. Or il est clair que  $nt$  est de l'ordre de grandeur de  $q \log y$ . Ainsi, à  $t$  fixé, on obtient une bonne majoration de  $q$ , indépendante de  $n$  et de  $y$ . Par exemple, dans le cas  $t = 1$ , on obtient  $q \leq 2063$ .

Afin de traiter (8), il convient de majorer  $t$  et, à cet effet, de faire appel (comme dans la partie 5) à un résultat de Le [27], qui majore  $t$  en fonction de  $q$ . On vient cependant d'obtenir, via les formes linéaires de logarithmes 5-adiques, une minoration de  $t$  en fonction de  $q$ . Les deux estimations se croisent et conduisent, dans ce cas précis, à  $t \leq 11$ . D'après le Théorème 10,  $t$  est nécessairement impair, donc il ne nous reste plus que six équations à traiter.

Pour cela, on montre à l'aide de congruences (cf. Troisième étape de la démonstration du Théorème 10) que toute solution vérifie  $n \equiv 1 \pmod{q}$ , puis on conclut en utilisant le Théorème 8, ou bien en procédant exactement comme lors de la quatrième étape de la démonstration du Théorème 10.

A l'aide de longs calculs sur ordinateur, nous avons appliqué cette méthode pour traiter les valeurs de  $x$  auxquelles s'applique le lemme hypergéométrique

de Le [27]. Nous avons cependant utilisé le raffinement du Théorème 1 démontré dans [9] et avons obtenu le résultat suivant [19].

**THÉORÈME 12.** *Si l'équation (1) a une solution  $(x, y, n, q)$  avec  $n \geq 5$ , alors il existe un nombre premier  $p$  tel que  $p$  divise  $x$  et  $q$  divise  $p - 1$ . En particulier, on a  $x \geq 2q + 1$ .*

Le Théorème 12 contient en particulier l'énoncé suivant, obtenu dans [17], qui résout une conjecture vieille d'une cinquantaine d'années.

**COROLLAIRE 1.** *Un nombre entier supérieur à 1 ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance parfaite.*

Comme toutes les solutions de (1) vérifiant  $q = 2$  sont connues, le Théorème 12 résout complètement (1) quand  $x$  est un produit de nombres premiers de la forme  $2^a + 1$ . En outre, comme l'on dispose (cf. Inkeri [25]) de quelques informations sur (1) avec  $q = 3$ , on connaît toutes les solutions de (1) si  $x$  est une puissance quelconque d'un entier inférieur ou égal à 20 et différent de 11. On est ainsi conduit à formuler le problème suivant.

**PROBLÈME 1.** Montrer que l'équation

$$(9) \quad \frac{11^{tn} - 1}{11^t - 1} = y^5$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions  $(y, t, n)$ , où  $t \geq 1$ ,  $y \geq 2$  et  $n \geq 3$  sont des entiers.

Pour être complet, il convient de mentionner que la théorie des formes linéaires de logarithmes ultramétriques simultanées en plusieurs places, développée dans [11], permet d'étendre sensiblement le Théorème 12.

## 7. A NOUVEAU LES CONGRUENCES

Au cours de la troisième étape de la démonstration présentée dans la partie 5, nous avons vu comment un raisonnement de congruences permet de montrer, *en principe*, que, si les entiers  $x$  et  $q$  sont fixés, et s'il existe  $n$  et  $y$  vérifiant  $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ , alors  $n$  est congru à 1 modulo  $q$ . Ceci ne nous permet cependant pas de résoudre le Problème 1 car la variable  $t$  peut