Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 48 (2002)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXPOSANT ET INDICE D'ALGÈBRES SIMPLES CENTRALES NON RAMIFIÉES

Autor: Colliot-Thélène, Jean-Louis

Kapitel: 3. Algèbres non ramifiées sur les produits de courbes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66070

est égal à l. Le cas le plus simple est celui où k est un corps de nombres arbitraire, on trouve un exemple avec une algèbre d'exposant 2 et d'indice 4 sur le corps des fonctions d'une conique définie sur k.

Si l'on veut fabriquer des exemples dans une tour infinie, comme dans le théorème, il suffit de considérer un corps k, de caractéristique différente de l et dont le groupe de Brauer contient un exemplaire de $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. C'est le cas pour les corps locaux non archimédiens, et pour les corps de nombres. D'après le théorème de Merkur′ev-Suslin [MS], c'est le cas pour tout corps qui contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de l, et qui possède au moins un élément non trivial d'ordre l dans son groupe de Brauer. On trouvera dans Merkur′ev [M1] des conditions nettement plus faibles assurant l'existence d'un tel sous-groupe.

Pour les corps de nombres, pour toute algèbre simple centrale, l'exposant est égal à l'indice, on peut donc recopier entièrement le théorème ci-dessus, avec $X = \mathrm{Spec}(k)$ à la place de la surface complexe X, et avec l premier quelconque.

3. Algèbres non ramifiées sur les produits de courbes

Au paragraphe 1, on a donné des exemples de corps gauches provenant par diverses constructions (produit de variétés, cup-produit de classes de cohomologie, somme dans le groupe de Brauer) d'une classe fondamentale, la classe de $x \in \mathbf{C}(x)^*/\mathbf{C}(x)^{*n} = H^1_{\text{ét}}(\mathbf{C}(x), \mathbf{Z}/n)$, qui est une classe de cohomologie (nécessairement) ramifiée sur le corps des fractions de la droite projective sur le corps des complexes. Sur une courbe elliptique E sur $\mathbf{C}$, on dispose de classes non ramifiées dans $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/n) \subset H^1(\mathbf{C}(E), \mathbf{Z}/n) \simeq \mathbf{C}(E)^*/\mathbf{C}(E)^{*n}$. Des constructions analogues vont ici donner des classes de cohomologie non ramifiées, des classes d'algèbres simples centrales non ramifiées. Mais il n'est pas clair que ces classes sont non triviales.

Question 1. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \ldots, E_m$ des courbes elliptiques sur le corps $\mathbf{C}$. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit g_i une classe non triviale dans $H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \hookrightarrow \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$. Sur le corps des fractions du produit $X = E_1 \times \cdots \times E_m$, la restriction du cup-produit $g_1 \cup \cdots \cup g_m \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$ est-elle non triviale ?

Une question a priori plus faible (mais équivalente pour $m = 2$, par le théorème de Merkur′ev-Suslin, et conjecturalement équivalente pour tout m)

est la suivante: Voyant g_i comme un élément de $\mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$, le symbole $\{g_1, \dots, g_m\}$ est-il non trivial dans le quotient $K_m^M(\mathbf{C}(X))/l$ du groupe de Milnor $K_m^M(\mathbf{C}(X))$?

La réponse à cette question ne saurait être uniforme. Considérons le cas $m = 2$, $l = 2$. Soient $E_1/\mathbf{C}$ et $E_2/\mathbf{C}$ deux courbes elliptiques liées par une isogénie $E_2 \to E_1$ de degré 2. Il existe alors g_1 sur E_1 et g_2 sur E_2 comme ci-dessus tels que l'algèbre de quaternions (g_1, g_2) sur le corps des fonctions de $E_1 \times E_2$ soit une algèbre de matrices. (Pour le voir, poser $F = \mathbf{C}(E_2)$, considérer le point de $E_1(F)/2$ défini par l'isogénie $E_2 \to E_1$ et appliquer la suite exacte donnée dans la proposition 11 ci-après.)

On a néanmoins:

PROPOSITION 11. *Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques, et $x \in \mathbf{C}(E_1)^*$, $y \in \mathbf{C}(E_2)^*$, non carrés, et de diviseur un double. Si E_1 et E_2 ne sont pas isogènes, alors l'algèbre de quaternions (x, y) sur le corps des fonctions de $E_1 \times E_2$ est à division.*

Démonstration. Soit E une courbe elliptique sur un corps F de caractéristique différente de 2. Supposons que E possède tous ses points d'ordre 2 sur F. On peut supposer E donnée par l'équation $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$. Soient $f, g \in F(E)^*/F(E)^{*2}$ les classes de $(x-a)$ et $(x-b)$. Ces classes proviennent d'éléments de $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/2)$. La suite de Kummer pour la multiplication par 2 sur E donne naissance à la suite exacte:

$$0 \to E(F)/2 \to (F^*/F^{*2})^2 \to {}_2\mathrm{Br}^0(E) \to 0\,.$$

Dans cette suite, $\mathrm{Br}^0(E)$ est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Br}(E)$ nuls en l'origine de E, la flèche $E(F)/2 \to (F^*/F^{*2})^2$ envoie le point M sur la classe de la paire $(g(M), f(M))$, et la flèche $(F^*/F^{*2})^2 \to {}_2\mathrm{Br}^0(C)$ envoie (α, β) sur $(\alpha, f) + (\beta, g)$.

Notons désormais $E_1 = E$ et considérons alors le cas particulier où $F = \mathbf{C}(E_2)$ est le corps des fonctions d'une autre courbe elliptique E_2 sur les complexes, non isogène à E_1. Alors $E_1(F) = E_1(\mathbf{C})$, et donc $E_1(F)/2 = 0$. Par ailleurs le groupe de Brauer de $F = \mathbf{C}(E_2)$ est nul. Ainsi $(F^*/F^{*2})^2 \simeq {}_2\mathrm{Br}(E_{1F})$.

Ceci implique que l'application naturelle

$$H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \oplus H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \to {}_2\mathrm{Br}(E_1 \times E_2)$$

définie par $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, f) + (\beta, g)$ est injective; on peut en fait montrer qu'elle est surjective, et définit un isomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(E_1, \mathbf{Z}/2) \otimes H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \simeq {}_2\mathrm{Br}(E_1 \times E_2)\,.$$

(On pourrait faire le même argument avec la multiplication par un premier $l \geq 2$ à la place de $l = 2$, et avec deux fonctions f et g de diviseur une puissance l-ième.)

Ceci donne en particulier le résultat annoncé.

QUESTION 2. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \dots, E_d$ des courbes elliptiques (non nécessairement distinctes) sur le corps des complexes, et soit $C/\mathbf{C}$ une courbe projective lisse connexe, de genre suffisamment grand pour que la dimension de $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l)$ sur $\mathbf{F}_l$ soit au moins d. Soient $f_1, \dots, f_d \in H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(C)^*/\mathbf{C}(C)^{*l}$, linéairement indépendants, et pour $i = 1, \dots, d$, soit $g_i \in H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$ non trivial. Fixons une racine primitive l-ième de 1 dans $\mathbf{C}$. Sur le produit $X = C \times E_1 \times \cdots \times E_d$, on peut considérer le produit tensoriel d'algèbres cycliques $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$. C'est une algèbre non ramifiée. Si l'on prend $C, E_1, \dots, E_d$ suffisamment générales, cette algèbre est-elle un corps gauche ?

APPENDICE

par Ofer GABBER

La question 2, et aussi la question 1 pour des courbes générales, ont une réponse affirmative.

Nous commençons par discuter la question 2. L'idée est de déformer la situation ramifiée de l'exemple 6 en une situation non ramifiée : on peut voir un revêtement de Kummer de $\mathbf{G}_m$ (revêtement qui est ramifié à l'infini) comme limite de revêtements non ramifiés de courbes elliptiques. Par ailleurs une algèbre simple centrale qui a une (bonne) spécialisation à division est elle-même à division.

Nous aurons besoin d'énoncés algébriques généraux.