Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 48 (2002)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXPOSANT ET INDICE D'ALGÈBRES SIMPLES CENTRALES NON RAMIFIÉES

Autor: Colliot-Thélène, Jean-Louis

Kapitel: 1. Quelques résultats et exemples classiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66070

l'on peut contrôler l'indice, grâce précisément aux résultats classiques décrits au paragraphe 1.

NOTATIONS. Soient K/k une extension de corps et A une k-algèbre simple centrale. On note A_K la K-algèbre simple centrale $A \otimes_k K$. Pour K/k extension finie cyclique de corps, de groupe de Galois engendré par un élément σ, et $b \in k^*$, on note $(K/k, \sigma, b)$ l'algèbre cyclique standard: c'est la k-algèbre $\bigoplus_{i=0}^{r-1} K\xi^i$, satisfaisant $\xi^r = b$ et $\xi \cdot \alpha = \sigma(\alpha) \cdot \xi$ pour tout $\alpha \in K$.

Pour K/k cyclique de degré r (premier à la caractéristique), et k contenant une racine primitive r-ième de l'unité ζ_r, on peut écrire $K = k(a^{1/r})$ avec $a \in k^*$ et on définit σ par la condition $\sigma(a^{1/r}) = \zeta_r a^{1/r}$. On note alors $(K/k, \sigma, b) = (a, b)_{\zeta_r}$. Pour $r = 2$, on trouve une algèbre de quaternions, simplement notée (a, b).

Je remercie Jean-Pierre Tignol pour plusieurs messages. Je remercie Ofer Gabber de ses réponses à mes questions, et d'avoir accepté de les faire paraître en appendice à cet article.

1. QUELQUES RÉSULTATS ET EXEMPLES CLASSIQUES

PROPOSITION 1 (Albert; [Al1], Thm. 3). *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a, b, c, d \in k^*$. La k-algèbre simple centrale $(a, b) \otimes_k (c, d)$ est un corps gauche si et seulement si la forme quadratique diagonale $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd \rangle$ est anisotrope sur le corps k.*

Des variantes de la proposition suivante se trouvent chez divers auteurs ([T1], Prop. 2.4, p. 211; [JW], Thm. 5.15; [FSS], Lemma 4.6, p. 473; [Bru], Lemma 4, p. 382).

PROPOSITION 2. *Soient K/k une extension cyclique de corps, σ un générateur du groupe de Galois de K/k, et t une variable. Soit A une k-algèbre simple centrale. On a alors les formules*

$$i(A_{k(t)} \otimes_{k(t)} (K(t)/k(t), \sigma, t)) = i(A_K) \cdot [K : k]$$

et

$$i(A_{k((t))} \otimes_{k((t))} (K((t))/k((t)), \sigma, t)) = i(A_K) \cdot [K : k] \, .$$

En particulier, si A est un corps gauche, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A_K *est un corps gauche;*

(ii) $A_{k(t)} \otimes_{k(t)} (K(t)/k(t), \sigma, t)$ *est un corps gauche;*

(iii) $A_{k((t))} \otimes_{k((t))} (K((t))/k((t)), \sigma, t)$ *est un corps gauche.*

En particulier, on a l'énoncé suivant:

COROLLAIRE 3. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a, b, c \in k^*$. Supposons $c \notin k^{*2}$, et soit $K = k(\sqrt{c})$. Soit t une variable. La K-algèbre de quaternions $(a, b)_K$ est un corps gauche si et seulement si la $k(t)$-algèbre de biquaternions $(a, b) \otimes (c, t)$ est un corps gauche.*

Comme le lecteur le vérifiera, ce dernier énoncé peut aussi se déduire de la proposition 1, du critère de Springer ([L1], chap. 6, Prop. 1.9) sur l'isotropie des formes quadratiques sur un corps $k((t))$, et du fait bien connu qu'une forme quadratique q de rang 4 sur un corps k est isotrope sur k si et seulement si elle l'est sur l'extension discriminant $k(\sqrt{d(q)})$ (conséquence immédiate de [L1], chap. 7, Lemma 3.1).

Un cas encore plus particulier est le suivant:

COROLLAIRE 4. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient $a, b \in k^*$. Soit $K = k(x, y)$ le corps de fonctions rationnelles en deux variables. L'algèbre de biquaternions $A = (a, x) \otimes (b, y)$ sur le corps $k(x, y)$ est un corps gauche si et seulement si les classes de a et b dans k^*/k^{*2} sont indépendantes.*

Démonstration. Le cas où les classes de a et b ne sont pas indépendantes est clair. Si elles sont indépendantes, alors a n'est pas un carré dans $k(\sqrt{b})$, et donc l'algèbre de quaternions (a, x) sur le corps $k(x)(\sqrt{b}) = k(\sqrt{b})(x)$ est un corps gauche. On applique alors le corollaire 3 à $(k(x), a, x, b, y)$ en lieu et place de (k, a, b, c, t).

Le corollaire 4 donne immédiatement des exemples de corps d'exposant 2 et d'indice 4 sur le corps $k(x, y)$ avec k l'un quelconque des corps suivants: $k = \mathbf{Q}$ (on retrouve là l'exemple original de Brauer [Br1]), k un corps p-adique, k un corps de fonctions d'au moins une variable sur un corps quelconque, par exemple le corps des complexes. Le cas le plus simple est celui de l'algèbre de biquaternions générique $(x, y) \otimes (z, t)$ sur le corps de fractions rationnelles $K = \mathbf{C}(x, y, z, t)$, mais on donne tout aussi facilement des exemples sur le corps $K = \mathbf{C}(x, y, z)$.

Le corollaire 3 permet de donner des exemples de type un peu différent.

EXEMPLE 5. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit $a \in k^*$, $a \notin k^{*2}$. L'algèbre simple centrale $D = (x,a) \otimes (x+1,y)$ sur le corps $K = k(x,y)$ est d'exposant 2 et d'indice 4.*

Démonstration. D'après le corollaire 3, il suffit de montrer que la $k(x)$-algèbre de quaternions (x,a) reste non-triviale par extension du corps de base de $k(x)$ à $k(z)$, avec $z^2 = x+1$. Sur le corps $k(z)$, cette algèbre se lit $(a, 1-z^2)$, et elle a un résidu non trivial $a \in k^*/k^{*2}$ en $z = 1$ (et $z = -1$). En particulier sa classe dans le groupe de Brauer est non triviale, c'est un corps gauche.

Ainsi, pour $\mathbf{F}$ un corps fini de caractéristique différente de 2, il existe des algèbres d'indice 2 et d'exposant 4 sur $\mathbf{F}(x,y)$.

L'avantage de la proposition 2 est qu'elle permet d'itérer des exemples.

EXEMPLE 6. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient x_i $(i = 1, \ldots, n)$ des variables indépendantes, et a_i $(i = 1, \ldots, n)$ des éléments de k^*. Le produit tensoriel $A = (a_1,x_1) \otimes \cdots \otimes (a_n,x_n)$, sur le corps $k(x_1, \ldots, x_n)$, des algèbres de quaternions (a_i,x_i), d'indice 2^n, est un corps gauche si et seulement si les classes des a_i dans le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel k^*/k^{*2} sont indépendantes.*

On sait que pour une extension quadratique $K = k(\sqrt{c})/k$, le noyau de la restriction $k^*/k^{*2} \to K^*/K^{*2}$ est le groupe $\{1, c\}$. L'exemple 6 se déduit alors de la proposition 2 par récurrence.

Si l'on prend pour k le corps engendré sur un corps de base k_0 par n variables indépendantes y_i, on voit que le produit tensoriel $(y_1,x_1) \otimes \cdots \otimes (y_n,x_n)$, sur le corps $k_0(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ est un corps gauche. On retrouve ainsi un exemple dû à Köthe ([K], 1931).

On peut généraliser l'exemple, en considérant un corps k, des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_n$ du groupe de Galois de k, d'exposants respectifs n_i, des variables $x_1, \ldots, x_n$, et l'algèbre $A = (\chi_1,x_1) \otimes \cdots \otimes (\chi_n,x_n)$ sur le corps $k(x_1, \ldots, x_n)$. C'est un corps gauche si et seulement si le sous-groupe de $H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ engendré par les χ_i est d'ordre $\prod_i n_i$. On retrouve ici l'énoncé de Nakayama ([N], 1935).

La proposition 1 interdit de construire des exemples d'algèbres de biquaternions à division sur un corps K lorsque ce corps est C_2 (par exemple sur un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes).

De façon plus générale, on a l'énoncé suivant, établi par de nombreux auteurs (voir la remarque ci-dessous). Pour la commodité du lecteur, nous rappelons le principe de la démonstration.

Un corps K est dit C_i si toute forme homogène à coefficients dans K de degré $d > 0$ en $n > d^i$ variables possède un zéro non trivial. Un corps K est dit C_i' si pour tout $r \geq 1$ et tout ensemble de formes homogènes $f_j(X_1, \dots, X_n)$ ($j = 1, \dots, r$) à coefficients dans K, si l'on a $n > \sum_j d_j^i$, où d_j désigne le degré de f_j, alors il existe un zéro commun non nul $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ pour les formes f_j. Un corps C_i' est C_i ; la réciproque n'est pas connue en général (cf. [NSW], p. 310 à 312).

PROPOSITION 7. *Soit K un corps C_2'. Toute classe dans le groupe de Brauer de K d'exposant $2^r \cdot 3^s$ est représentée par un corps gauche d'indice $2^r \cdot 3^s$. Pour $s = 0$, ceci vaut pour tout corps C_2.*

Démonstration ([A], [MS]). Comme toute algèbre simple se décompose en produit d'algèbres simples d'indices deux à deux premiers entre eux, il suffit d'établir le résultat pour l'exposant p^n avec $p = 2$ ou 3 et n quelconque.

Supposons l'énoncé établi pour $n = 1$, pour tout corps C_2' (resp. C_2 si $p = 2$). L'énoncé suit alors par récurrence pour tout exposant p^n. En effet si A sur un tel corps K est d'exposant p^{n+1}, alors l'algèbre $A^{\otimes p}$ est d'exposant p^n, donc par hypothèse de récurrence d'indice p^n, donc déployée par une extension L/K de degré p^n. Le corps L est C_2' (resp. C_2 si $p = 2$), et l'algèbre A_L est d'exposant p, donc d'indice p, donc déployée par une extension M/L de degré p. Ainsi A est déployée par une extension M/K de degré p^{n+1}, donc est d'indice p^{n+1}. Pour cette réduction, voir aussi le théorème 3, p. 175, du livre d'Albert [Al2].

On est donc réduit au cas $n = 1$. Toute algèbre simple centrale d'exposant p est semblable à un produit tensoriel d'algèbres d'indice p. En caractéristique $p > 0$, c'est un théorème classique (Teichmüller, Albert; [Al2], Chap. VII, Thm. 28; [J], Thm. 4.2.17, p. 162). Lorsque la caractéristique de K est différente de p et que K contient les racines p-ièmes de l'unité, c'est le théorème de Merkur′ev-Suslin ([MS], Thm. (16.1)). Merkur′ev ([M1], Thm. 2, p. 2617) en a déduit le cas où K ne contient pas toutes les racines p-ièmes de l'unité (pour $p = 3$, voir déjà [MS] (16.4)).

Il suffit donc de voir: si A et B sont deux algèbres à division d'indice $p = 2$ ou $p = 3$ sur un corps K qui est C_2', ou simplement C_2 si $p = 2$, alors $A \otimes_K B$ n'est pas un corps gauche. Pour $p = 2$ et K de caractéristique différente de 2, ceci résulte immédiatement du critère d'Albert (Proposition 1). En général, on écrit la condition pour qu'il existe une extension $L = K(\alpha)$ de degré p qui déploie simultanément A et B. Soit $A = k \oplus V_A$, resp. $B = k \oplus V_B$, une décomposition de A, resp. B, comme espace vectoriel sur k.

Pour trouver α, il suffit de trouver $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, non nuls, tels que le polynôme caractéristique (de degré p) de $v_1 \in A$ coïncide avec celui de $v_2 \in B$.

Ceci correspond à un système de formes homogènes sur $V_1 \oplus V_2$. Pour $p = 2$, on trouve une forme quadratique en 6 variables. Pour $p = 3$, on trouve un système formé d'une forme quadratique et d'une forme cubique, en 16 variables. On a $6 > 2^2$ et $16 > 2^2 + 3^2$; le corps K étant C_2', le système a donc une solution non triviale.

REMARQUE. La proposition ci-dessus est énoncée par Artin et Harris ([A], Thm. 6.2), Artin et Tate ([A], Appendix), Merkur′ev et Suslin ([MS], (16.4) et (16.8)), Yanchevskiĭ, Platonov). Notons que ce qui est appelé C_2 dans [A] est ici appelé C_2'. Comme me l'a fait observer O. Gabber, la démonstration du théorème de l'appendice de [A] (p. 208) et celle donnée dans [MS], qui considèrent le système d'équations homogènes correspondant à A, B (plutôt que V_1, V_2 comme ci-dessus), requièrent une précision: les scalaires de K sont alors solutions du système d'équations homogènes considéré, et ce ne sont pas des solutions intéressantes.

2. Algèbres non ramifiées via la réduction d'indice

Pour construire des exemples d'algèbres non ramifiées pour lesquelles exposant et indice diffèrent, j'utilise le calcul de « réduction d'indice » dû à Schofield et van den Bergh ([B], [SvdB]). La question générale, étudiée par la suite par Merkur′ev, Panin, Wadsworth (voir [M2], [M3], [L2]), est d'étudier le comportement de l'indice d'une algèbre simple centrale A sur un corps k par passage au corps des fonctions $K = k(X)$ d'une k-variété projective X qui est un espace homogène d'un groupe linéaire connexe (exemples: variétés de Severi-Brauer, quadriques de dimension au moins un).