

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 48 (2002)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE HILBERT METRIC AND GROMOV HYPERBOLICITY  
**Autor:** Karlsson, Anders / NOSKOV, Guennadi A.  
**Kurzfassung**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66068>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## THE HILBERT METRIC AND GROMOV HYPERBOLICITY

by Anders KARLSSON<sup>1)</sup> and Guennadi A. NOSKOV<sup>2)</sup>

ABSTRACT. We give some sufficient conditions for Hilbert's metric on convex domains  $D$  to be Gromov hyperbolic. The conditions involve an intersecting chords property, which we in turn relate to the Menger curvature of triples of boundary points and, in the case the boundary is smooth, to differential geometric curvature of  $\partial D$ . In particular, the intersecting chords property and hence Gromov hyperbolicity is established for bounded, convex  $C^2$ -domains in  $\mathbf{R}^n$  with non-zero curvature.

We also give some necessary conditions for hyperbolicity: the boundary must be of class  $C^1$  and may not contain a line segment. Furthermore we prove a statement about the asymptotic geometry of the Hilbert metric on arbitrary convex (i.e. not necessarily strictly convex) bounded domains, with an application to maps which do not increase Hilbert distance.

### INTRODUCTION

Let  $D$  be a bounded convex domain in  $\mathbf{R}^n$  and let  $h$  be the Hilbert metric, which is defined as follows. For any distinct points  $x, y \in D$ , let  $x'$  and  $y'$  be the intersections of the line through  $x$  and  $y$  with  $\partial D$  closest to  $x$  and  $y$  respectively. Then

$$h(x, y) = \log \frac{yx' \cdot xy'}{xx' \cdot yy'}$$

where  $zw$  denotes the Euclidean distance  $\|z - w\|$  between two points. The expression  $\frac{yx' \cdot xy'}{xx' \cdot yy'}$  is called the *cross-ratio* of four collinear points and is invariant under projective transformations. For the basic properties of the distance  $h$  we refer to [Bu55] or [dIH93].

<sup>1)</sup> Supported by SFB 343 of the Universität Bielefeld.

<sup>2)</sup> Supported by SFB 343 of the Universität Bielefeld and GIF-grant G-454-213.06/95.