

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 48 (2002)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG  
**Autor:** Lamy, Stéphane  
**Kapitel:** 2. Applications birationnelles entre surfaces  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66078>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. APPLICATIONS BIRATIONNELLES ENTRE SURFACES

Notre démarche pour démontrer le théorème de Jung est de considérer un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$  comme une application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même, et d'utiliser un théorème de structure classique pour ce type d'applications. Parmi beaucoup de choix possibles nous avons pris comme référence pour ce paragraphe les deux premiers chapitres de [4].

Par surface nous entendrons toujours une surface complexe algébrique lisse, et par ouvert un ouvert de Zariski. Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces; une application rationnelle  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  est la donnée d'un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $Y$ , qui ne puisse pas s'étendre à un ouvert plus grand. Quand  $U = X$  on a un vrai morphisme: on réserve à ce cas la notation  $\varphi: X \mapsto Y$ . On montre facilement (voir [4, II.4]) que  $X \setminus U$  est un ensemble fini de points. Ainsi une application rationnelle n'est pas une application au sens strict, puisque qu'il existe un nombre fini de points hors du domaine de définition. Cependant l'image d'une courbe est elle toujours définie: si  $C$  est une courbe dans  $X$ , on définit la transformée stricte  $\varphi(C)$  de  $C$  par  $\varphi$  comme l'adhérence de l'image par  $\varphi$  de  $C \cap U$ . Bien noter que l'image d'une courbe (disons irréductible) peut être un point.

Une application birationnelle entre  $X$  et  $Y$  est la donnée d'une application rationnelle  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  qui induit un isomorphisme entre un ouvert de  $X$  et un ouvert de  $Y$ .

EXEMPLE. Considérons l'application suivante de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même (que nous avons déjà rencontrée lors de l'énoncé du théorème de Noether):

$$\sigma: [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy].$$

L'application  $\sigma$ , dite application quadratique standard, est bien définie en dehors des trois points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$ . De plus  $\sigma$  induit un automorphisme de  $\mathbf{P}^2$  privé des trois droites  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . Nous laissons le lecteur vérifier par exemple que l'image par  $\sigma$  de la droite  $z = 0$  est le point  $[0 : 0 : 1]$ , que l'image d'une droite passant par  $[0 : 0 : 1]$  est encore une droite passant par  $[0 : 0 : 1]$ , et que l'image d'une droite générique est une conique passant par les trois points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$ .

Un exemple fondamental d'application birationnelle est l'application d'éclatement en un point, que nous rappelons brièvement. Soit  $S$  une surface,

et  $p$  un point de  $S$ . Il existe une surface  $\tilde{S}$  et un morphisme  $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$  tels que

- $E = \pi^{-1}(p)$  soit isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ ;
- $\pi$  induise un isomorphisme de  $\tilde{S} \setminus E$  sur  $S \setminus p$ .

A isomorphisme près  $\tilde{S}$  et  $\pi$  sont uniques. On dit que  $\pi$  est l'application d'éclatement au point  $p$ , ou encore que  $\tilde{S}$  est l'éclaté de  $S$  en  $p$ ; la courbe rationnelle  $E$  est appelée le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Si  $C \subset S$  est une courbe passant par  $p$ , on note  $\tilde{C}$  la transformée stricte de  $C$ , c'est-à-dire l'adhérence de  $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$ . Par transformée totale de  $C$  on désigne le diviseur  $\pi^*C$ ; par exemple si  $C$  est lisse en  $p$  on a  $\pi^*C = \tilde{C} + E$ .

Rappelons que la surface  $S$  est munie d'une forme d'intersection: si  $D_1, D_2$  sont deux diviseurs (*i.e.* des sommes finies  $\sum \lambda_i C_i$  où les  $C_i$  sont des courbes irréductibles éventuellement singulières, et les  $\lambda_i$  sont des entiers relatifs), alors on peut définir un nombre d'intersection  $D_1 \cdot D_2$ . Lorsque  $D_1$  et  $D_2$  sont simplement deux courbes distinctes,  $D_1 \cdot D_2$  correspond au nombre de points d'intersection de ces deux courbes comptés avec multiplicité;  $D_1 \cdot D_2$  est dans ce cas positif ou nul. On peut étendre cette définition naturelle pour donner un sens à l'intersection de deux diviseurs quelconques, en particulier on peut parler de l'auto-intersection d'un diviseur (voir [4, th. I.4]). Nous noterons  $D^2$  au lieu de  $D \cdot D$  l'auto-intersection d'un diviseur  $D$ . Bien noter que l'auto-intersection d'une courbe peut être négative. Le nombre d'intersection possède les propriétés agréables suivantes ( $D_1, D_2$  et  $D_3$  sont trois diviseurs):

- Si  $D_2$  et  $D_3$  sont linéairement équivalents alors  $D_1 \cdot D_2 = D_1 \cdot D_3$ ;
- Avec les notations ci-dessus:

$$(\pi^*D_1 \cdot \pi^*D_2) = (D_1 \cdot D_2);$$

$$(E \cdot \pi^*D_1) = 0.$$

Concernant l'action de l'éclatement sur les nombres d'intersection, nous utiliserons de manière répétée les égalités suivantes qui découlent facilement des propriétés que nous venons d'énoncer ( $C$  est toujours une courbe lisse passant par  $p$ ):

$$\text{FORMULES 5. } E^2 = -1;$$

$$\tilde{C}^2 = C^2 - 1.$$

Précisons un point de vocabulaire. Suivant comment nous considérerons l'application  $\tilde{S} \mapsto S$  nous emploierons deux terminologies différentes: nous dirons que l'on passe de  $S$  à  $\tilde{S}$  en éclatant le point  $p$ , et que l'on passe

de  $\tilde{S}$  à  $S$  en contractant la courbe  $E$ . Dans la suite nous considérerons des suites d'éclatements. En notant  $\pi_{p_i}$  l'application d'éclatement au point  $p_i$ , nous aurons des applications de la forme  $\varphi: M \mapsto X$ , où  $M$  et  $X$  sont deux surfaces et  $\varphi = \pi_{p_n} \circ \dots \circ \pi_{p_1}$  (ici  $p_1 \in X$  et pour tout  $i \geq 2$ ,  $p_i$  appartient à la surface obtenue après éclatement des points  $p_1, \dots, p_{i-1}$ ). Dans cette situation nous dirons que  $p_1$  est le premier point éclaté par  $\varphi$ , ou inversement que le diviseur exceptionnel  $E_n$  produit par  $\pi_{p_n}$  est la première courbe contractée par  $\varphi$ .

Les éclatements suffisent à décrire toutes les applications birationnelles entre surfaces: c'est ce qu'exprime le résultat suivant (voir [4, II.12]).

**THÉORÈME 6** (Zariski, 1944). *Toute application birationnelle entre deux surfaces s'obtient comme une suite d'éclatements puis de contractions; autrement dit si  $X, Y$  sont des surfaces et*

$$g: X \dashrightarrow Y$$

*est une application birationnelle (qui n'est pas un isomorphisme), alors il existe une surface  $M$  et des suites d'éclatements  $\pi_1$  et  $\pi_2$  tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \dashrightarrow \bar{g} & Y \end{array}$$

Suivant Beauville nous attribuons ce théorème à Zariski. La preuve, qui n'est pas très difficile, se décompose en deux étapes. La première étape consiste à composer  $g$  avec une suite d'éclatements  $\pi_1$  afin d'éliminer les points d'indétermination. On obtient ainsi un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \bar{g} \\ X & \dashrightarrow \bar{g} & Y \end{array}$$

où  $\bar{g}$  est un morphisme. A noter que ce procédé peut s'appliquer à toute application rationnelle entre surfaces (voir [4, II.7]); et peut également s'adapter en dimension supérieure.

A contrario la deuxième étape, qui consiste à montrer que le morphisme  $\bar{g}$  est une suite de contractions (voir [4, II.11]) est tout à fait particulière au

cas d'un morphisme *birationnel* entre deux *surfaces*. On se ramène à montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 7. Soit  $\bar{g}: M \dashrightarrow Y$  un morphisme *birationnel* entre *surfaces*. Si  $y \in Y$  est un point où  $\bar{g}^{-1}$  n'est pas définie, alors  $\bar{g}$  se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{Y} & \\ h \nearrow & & \searrow \sigma \\ M & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \end{array}$$

où  $\sigma$  est l'éclatement en  $y$ , et  $h$  est un morphisme.

Nous allons proposer une preuve de cette proposition à l'aide d'un argument élémentaire de géométrie différentielle qui peut éclairer la démonstration donnée dans [4, II.8]. A noter qu'à aucun moment il n'est fait usage du critère de Castelnuovo (contraction des courbes rationnelles d'auto-intersection  $-1$ ). Nous admettons le

LEMME 8 (voir [4, II.10]). Si  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  est une application *birationnelle* entre deux *surfaces*, et si  $x \in X$  est un point où  $\varphi$  est non définie, alors il existe une courbe  $C \subset Y$  telle que  $\varphi^{-1}(C) = x$ .

*Preuve de la proposition 7.* Supposons que  $h = \sigma^{-1} \circ \bar{g}$  ne soit pas un morphisme, et soit  $x \in M$  un point où  $h$  n'est pas défini. Dans cette situation d'une part  $\bar{g}(x) = y$  et  $\bar{g}$  n'est pas localement inversible en  $x$ ; d'autre part il existe une courbe dans  $\tilde{Y}$  qui est contractée sur  $x$  par  $h^{-1}$ . Cette courbe ne peut être que le diviseur exceptionnel  $E$  associé à  $\sigma$ . Considérons  $p$  et  $q$  deux points distincts de  $E$  où  $h^{-1}$  est bien définie, et  $C, C'$  deux germes de courbes lisses transverses à  $E$  en  $p$  et  $q$  respectivement. Alors  $\sigma(C)$  et  $\sigma(C')$  sont deux germes de courbes lisses transverses en  $y$ , qui sont image par  $\bar{g}$  de deux germes de courbes en  $x$ . La différentielle de  $\bar{g}$  en  $x$  est donc de rang 2, ce qui vient contredire le fait que  $\bar{g}$  n'est pas localement inversible en  $x$  (voir figure 1).  $\square$

Avant de commencer la preuve du théorème de Jung nous précisons quelques points de vocabulaire et expliquons dans quel contexte nous ferons usage du théorème de Zariski. Nous appellerons points d'indétermination de  $g$  les points que l'on éclate lors de la construction de  $\pi_1$ ; ce sont donc des points qui appartiennent ou bien à  $X$  ou bien à des éclatés de  $X$ . Les

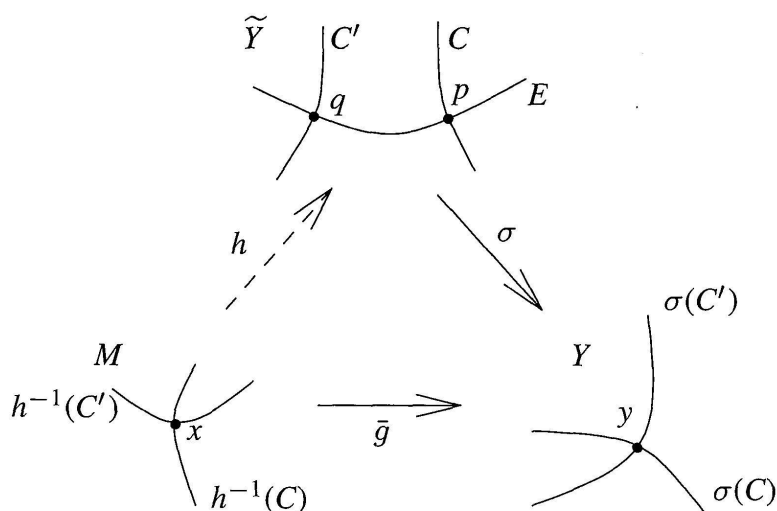


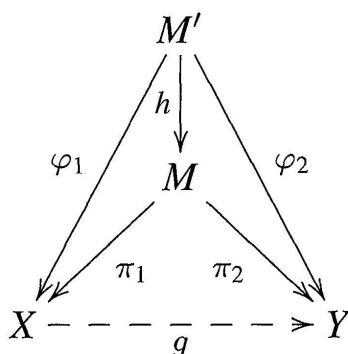
FIGURE 1

Supposer  $h$  non définie en  $x$  conduit à une contradiction

points d'indétermination contenus dans  $X$  seront dits points d'indétermination propres (classiquement on dit que les autres points sont dans des voisinages infiniment proches des points d'indétermination propres). Le nombre de points d'indétermination de  $g$  (propres ou non) sera noté  $\# \text{ind}(g)$ .

REMARQUE. A noter que cette définition est cohérente car les suites d'éclatements  $\pi_1$  et  $\pi_2$  produites par le théorème sont uniquement déterminées par  $g$  (à isomorphisme près). La suite  $\pi_1$  s'obtient précisément en éclatant successivement les points où  $g$  n'est pas définie. De manière symétrique la suite  $\pi_2$  est déterminée par les points où  $g^{-1}$  n'est pas définie. Bien sûr on pourrait rallonger artificiellement les suites  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en éclatant des points où  $g$  et  $g^{-1}$  sont bien définies. Il est cependant implicite dans notre énoncé du théorème de Zariski que nous considérons les suites  $\pi_1$  et  $\pi_2$  minimales, au sens où elles vérifient la propriété universelle suivante (voir [2]):

Soient  $\varphi_1: M' \mapsto X$  et  $\varphi_2: M' \mapsto Y$  deux morphismes birationnels tels que  $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$ . Alors il existe un unique morphisme  $h: M' \mapsto M$  qui fasse commuter le diagramme:



Dans toute la suite nous utiliserons le théorème de Zariski seulement dans un cas bien particulier : nous considérerons  $g: X \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  provenant d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Nous entendons par là que l'on s'est donné une partition  $X = \mathbf{C}^2 \cup D$  où  $D$  est une réunion de courbes irréductibles (appelée diviseur à l'infini), une partition  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{C}^2 \cup L$  où  $L$  est une droite (droite à l'infini), et que  $g$  induit un isomorphisme de  $X \setminus D$  dans  $\mathbf{P}^2 \setminus L$ . Cette situation entraîne des contraintes fortes sur les points d'indétermination de  $g$  ; c'est ce qu'exprime le lemme suivant :

LEMME 9. *Soient  $X$  une surface et  $g$  une application birationnelle de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  provenant d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Nous supposons de plus que  $g$  n'est pas un morphisme. Alors*

1.  *$g$  admet un seul point d'indétermination propre, situé sur le diviseur à l'infini de  $X$  ;*
2.  *$g$  admet des points d'indétermination  $p_1, \dots, p_s$  ( $s \geq 1$ ) tels que*
  - (a)  *$p_1$  soit le point d'indétermination propre ;*
  - (b) *pour tout  $i = 2, \dots, s$ , le point  $p_i$  soit situé sur le diviseur produit en éclatant  $p_{i-1}$  ;*
3. *chacune des courbes irréductibles contenues dans le diviseur à l'infini de  $X$  est contractée sur un point par  $g$  ;*
4. *la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée stricte d'une courbe contenue dans le diviseur à l'infini de  $X$  ;*
5. *en particulier, si  $X = \mathbf{P}^2$ , la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée de la droite à l'infini "à la source".*

*Preuve.* Nous savons (lemme 8) que si  $p$  est un point d'indétermination propre de  $g$  alors il existe une courbe qui est contractée sur  $p$  par  $g^{-1}$ . Dans notre situation la seule courbe de  $\mathbf{P}^2$  candidate à être contractée est la droite à l'infini ; il y a donc au plus un point d'indétermination propre pour  $g$  dans  $X$ . Comme nous supposons que  $g$  n'est pas un morphisme,  $g$  admet exactement un point d'indétermination propre. La deuxième affirmation découle alors par une récurrence immédiate. De même chaque courbe dans le diviseur à l'infini dans  $X$  est ou bien contractée sur un point, ou bien envoyée sur la droite à l'infini dans  $\mathbf{P}^2$ . Comme  $g^{-1}$  contracte la droite à l'infini sur un point, cette deuxième possibilité est exclue : nous avons montré la troisième assertion. De ce qui précède il découle que le diviseur à l'infini dans  $M$  est constitué du diviseur d'auto-intersection  $-1$  produit en éclatant  $p_s$ , des autres diviseurs produits au cours de la suite d'éclatements, tous d'auto-intersection inférieure ou égale à  $-2$ , et enfin de la transformée stricte du diviseur à

l'infini dans  $X$  (ici nous avons utilisé les formules 5). Comme la première courbe contractée par  $\pi_2$  doit être d'auto-intersection  $-1$ , et ne peut être la dernière courbe produite par  $\pi_1$  (car cela contredirait le fait que  $p_s$  est un point d'indétermination), on obtient bien que la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée stricte d'une courbe contenue dans le diviseur à l'infini de  $X$ . La dernière assertion n'est qu'une reformulation de la quatrième, dans le cas où  $X = \mathbf{P}^2$ .  $\square$

### 3. PREUVE DU THÉORÈME DE JUNG

Nous considérons  $g$  un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ , que nous prolongeons en une application birationnelle (toujours notée  $g$ ) de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même. Si  $g$  s'écrit

$$g: (x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

et que  $n$  est le degré de  $g$  (c'est-à-dire le plus grand des degrés de  $g_1$  et  $g_2$ ), alors en coordonnées homogènes l'extension de  $g$  à  $\mathbf{P}^2$  s'écrit

$$g: [x : y : z] \dashrightarrow [z^n g_1(x/z, y/z) : z^n g_2(x/z, y/z) : z^n].$$

La droite à l'infini dans  $\mathbf{P}^2$  est ici la droite d'équation  $z = 0$ . Nous voulons montrer que  $g$  s'écrit comme une composée d'automorphismes affines et élémentaires. La preuve va s'effectuer par récurrence sur le nombre  $\# \text{ind}(g)$  de points d'indétermination de  $g$ .

D'après le lemme 9 (assertion 1) le prolongement  $g: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  admet un unique point d'indétermination propre situé sur la droite à l'infini. En composant  $g$  par un automorphisme affine nous pouvons nous ramener au cas où ce point est  $[1 : 0 : 0]$ . Autrement dit nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}^2 & \\ a \nearrow & & \searrow g_0 \\ \mathbf{P}^2 & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbf{P}^2 \end{array}$$

où  $a$  est affine et  $g_0$  admet  $[1 : 0 : 0]$  comme point d'indétermination. Bien sûr on a

$$\# \text{ind}(g_0) = \# \text{ind}(g).$$