

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 48 (2002)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ON THE CLASSIFICATION OF CERTAIN PIECEWISE LINEAR AND DIFFERENTIABLE MANIFOLDS IN DIMENSION EIGHT AND AUTOMORPHISMS OF $S^1 \times S^5$
Autor: Schmitt, Alexander
Kapitel: 3.4 SOME 4-DIMENSIONAL CW-COMPLEXES
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-66077>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3.4 SOME 4-DIMENSIONAL CW-COMPLEXES

By Remark 3.4, a handle decomposition of X gives us a CW-complex which is homotopy equivalent to X . The following discussion will enable us to understand the 4-skeleton of that complex.

Let $W := S^2 \vee \cdots \vee S^2$ be the b -fold wedge product of 2-spheres. Suppose X is the CW-complex obtained by attaching a 4-cell to W via the map $g \in \pi_3(W)$. The Hilton-Milnor theorem ([30], Thm. 7.9.4) asserts that

$$\pi_3(W) = \bigoplus_{i=1}^b \pi_3(S^2) \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq b} \pi_3(S^3).$$

Choosing the standard generators for $\pi_3(S^2)$ and $\pi_3(S^3)$, we can describe g by a tuple $(l_i, i = 1, \dots, b; l_{ij}, 1 \leq i < j \leq b)$ of integers. These integers determine the cohomology ring of $X = W \cup_g D^4$ as follows:

PROPOSITION 3.11. *Let $y \in H^4(X, \mathbf{Z})$ be the generator of $H^4(X, \mathbf{Z})$ given by the attached 4-cell and x_1, \dots, x_b the canonical basis of $H^2(X, \mathbf{Z}) = H^2(W, \mathbf{Z})$. Then*

$$\begin{aligned} x_i \cup x_j &= l_{ij} \cdot y, & 1 \leq i < j \leq b, \\ x_i \cup x_i &= l_i \cdot y, & i = 1, \dots, b. \end{aligned}$$

This is proved like [22], (1.5), p. 103. We recall the proof in the following example.

EXAMPLE 3.12. We treat the case $b = 2$. Consider the embedding

$$\iota: S^2 \vee S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2 \hookrightarrow \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty.$$

The standard basis for $H^4(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{\oplus 3}$ is given by the elements y_1, y_2, y_3 obtained from attaching D^4 via $(1, 0; 0)$, $(0, 0; 1)$, and $(0, 1; 0)$, respectively. Let $h: D^4 \rightarrow D^4 \vee D^4 \vee D^4$ be the canonical map followed by

$$(\vartheta \cdot x \mapsto \vartheta \cdot m_{l_1}(x)) \vee (\vartheta \cdot x \mapsto \vartheta \cdot m_{l_{12}}(x)) \vee (\vartheta \cdot x \mapsto \vartheta \cdot m_{l_2}(x)).$$

Here, m_k stands for a representative of $[k \cdot \text{id}_{S^3}] \in \pi_3(S^3)$ and $D^4 = \{ \vartheta \cdot x \mid x \in S^3, \vartheta \in [0, 1] \}$. Now, h and ι glue to a map $f: X \rightarrow \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty$, and

$$\begin{aligned} f^*: H^4(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}) &\rightarrow H^4(X, \mathbf{Z}) \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 &\mapsto (a_1 l_1 + a_2 l_{12} + a_3 l_2) y, \end{aligned}$$

so that the assertion follows from the naturality of the cup-product.