

## 2.1 The classical invariants

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

and  $f^*(\underline{y}') = \underline{y}$ . We denote by  $\mathfrak{J}^{\text{PL}(C^\infty)}(b, b')$  the set of isomorphy classes of piecewise linear (smooth) based E-manifolds  $(X, \underline{x}, \underline{y})$  of dimension eight with vanishing second Stiefel-Whitney class,  $b_2(X) = b$ , and  $b_4(X) = b'$ .

### 2.1 THE CLASSICAL INVARIANTS

In the terminology of [24], the classical invariants of an E-manifold consist of its cohomology ring, the Stiefel-Whitney classes, the Wu classes, the Pontrjagin classes, the Euler class, the Steenrod squares, the reduced Steenrod powers, and the Pontrjagin powers. For an eight-dimensional E-manifold  $X$  with vanishing second Stiefel-Whitney class, the main result of [24] states that the classical invariants are fully determined by the following invariants:

1. The cup product map

$$\begin{aligned} \delta_X: S^2 H^2(X, \mathbf{Z}) &\longrightarrow H^4(X, \mathbf{Z}) \\ x \otimes x' &\longmapsto x \cup x'. \end{aligned}$$

2. The intersection form

$$\begin{aligned} \gamma_X: S^2 H^4(X, \mathbf{Z}) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ y \otimes y' &\longmapsto (y \cup y')[X]. \end{aligned}$$

Here,  $[X] \in H_8(X, \mathbf{Z})$  is the fundamental class determined by the orientation.

3. The first Pontrjagin class  $p_1(X) \in H^4(X, \mathbf{Q})$ .

REMARK 2.1. The above invariants are not independent. By associativity of the cohomology ring, the following relation holds

$$(1) \quad \delta_X^*(\gamma_X) \in S^4 H^2(X, \mathbf{Z})^\vee,$$

i.e.,

$$\gamma_X(\delta_X(x_1 \otimes x_2) \otimes \delta_X(x_3 \otimes x_4)) = \gamma_X(\delta_X(x_1 \otimes x_3) \otimes \delta_X(x_2 \otimes x_4)),$$

for all  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in H^2(X, \mathbf{Z})$ . Furthermore,

PROPOSITION ([24], Prop. A.7 or Cor. 3.14 below). *For every element  $y \in H^4(X, \mathbf{Z})$  we have*

$$(2) \quad p_1(X)y \equiv 2y^2 \pmod{4}.$$

Note that this implies  $p_1(X) \in H^4(X, \mathbf{Z})$ . If, in addition,  $X$  is differentiable then for every integral lift  $W \in H^2(X, \mathbf{Z})$  of  $w_2(X)$  one has

$$(3) \quad 3p_1(X)^2 - 14p_1(X)W^2 + 7W^4 \equiv 12 \operatorname{Sign}(\gamma_X) \pmod{2688}.$$

Müller has also shown [24] that these relations imply all the other relations among the classical invariants of  $X$ . Conversely, a piecewise linear manifold  $X$  whose invariants obey relation (3) admits a differentiable structure [18], [24].

We are led to the following algebraic concept: A *system of invariants of type  $(b, b')$*  is a triple  $(\delta, \gamma, p)$ , consisting of

- a homomorphism  $\delta: S^2\mathbf{Z}^{\oplus b} \rightarrow \mathbf{Z}^{\oplus b'}$ ,
- a unimodular symmetric bilinear form  $\gamma: S^2\mathbf{Z}^{\oplus b'} \rightarrow \mathbf{Z}$ , and
- an element  $p \in \mathbf{Z}^{\oplus b'}$ .

We denote by  $Z(b, b')$  the set of systems of invariants of type  $(b, b')$ .

Now, let  $(X, \underline{x}, \underline{y})$  be a based eight-dimensional E-manifold. This defines a set of invariants  $Z_{(X, \underline{x}, \underline{y})} := (\delta_X, \gamma_X, p_1(X))$  of type  $(b_2(X), b_4(X))$ . Thus, we have natural maps

$$\begin{aligned} Z^{\text{PL}(C^\infty)}(b, b') &: \mathfrak{J}^{\text{PL}(C^\infty)}(b, b') \longrightarrow Z(b, b') \\ [X, \underline{x}, \underline{y}] &\longmapsto Z_{(X, \underline{x}, \underline{y})}. \end{aligned}$$

It will be the concern of our paper to understand the maps  $Z^{\text{PL}(C^\infty)}$  as well as possible. The first result can be easily derived from Wall's work [36] and deals with the case  $b = 0$ . It will be proved in detail in Section 4.1.

THEOREM 2.2. i) *The map  $Z^{\text{PL}}(0, b')$  is injective. Its image consists precisely of those elements which satisfy the relations (1) and (2).*

ii) *Given two smooth based E-manifolds  $(X, \underline{y})$  and  $(X', \underline{y}')$  with  $b_2(X) = 0 = b_2(X')$  and  $Z_{(X, \underline{y})} = Z_{(X', \underline{y}')}$ , there exists an exotic 8-sphere  $\Sigma$  such that  $(X \# \Sigma, \underline{y})$  and  $(X', \underline{y}')$  are smoothly isomorphic. In particular, the fibres of  $Z^{C^\infty}$  have cardinality at most two. The image of  $Z^{C^\infty}$  consists exactly of those elements which satisfy the relations (1), (2), and (3).*