

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 48 (2002)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ON THE RATIONAL FORMS OF NILPOTENT LIE ALGEBRAS AND LATTICES IN NILPOTENT LIE GROUPS  
**Autor:** Semenov, Yu. S.

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66073>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Now it is evident that  $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$  is isomorphic to either  $\mathfrak{he}_3(\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{he}_3(\mathbf{R})$ , or  $\mathfrak{he}_3(\mathbf{R}[x]/(x^2))$ , or  $\mathfrak{he}_3(\mathbf{C})$  depending on the sign of  $m$ . Thus, we have classified up to  $\mathbf{Q}$ -isomorphism all rational forms for these 3 real Lie algebras. By Theorem 2 these forms are non-isomorphic. The proof of the theorem is complete.  $\square$

REMARK. It is worth mentioning that the above three real Lie algebras are not pairwise isomorphic over  $\mathbf{R}$ . Indeed, the centralizer of any element in  $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{he}_3(\mathbf{C})$  is even dimensional over  $\mathbf{R}$  since this algebra can be viewed as a complex Lie algebra, whereas in both  $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{he}_3(\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{he}_3(\mathbf{R})$  and  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{he}_3(\mathbf{R}[x]/(x^2))$  there are elements with 5-dimensional centralizers. In order to show that the last two algebras are not isomorphic we need some more information about elements with 5-dimensional centralizers.

The centralizer  $C(x)$  will not be changed if we scale  $x$  by any  $\lambda \neq 0$  or add to  $x$  any central element. This means that dimension of the centralizer is a well-defined function on the projective space  $\mathbf{P}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$  where  $\mathfrak{g}$  is either  $\mathfrak{g}_+$  or  $\mathfrak{g}_0$ . Straightforward computations show that in  $\mathbf{P}(\mathfrak{g}_0/[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])$  all points with 5-dimensional centralizer belong to a unique line whereas in  $\mathbf{P}(\mathfrak{g}_+/[\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+])$  the points under consideration form two disjoint lines.

#### REFERENCES

- [1] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie. Chap. I, 3*. Hermann, Paris, 1972.
- [2] CORWIN, L. J. and F. P. GREENLEAF. *Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications. Part I*. Cambridge Univ. Press, 1989.
- [3] DIXMIER, J. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III. *Canad. J. Math.* 10 (1958), 321–348.
- [4] RAGHUNATHAN, M. *Discrete Subgroups of Lie Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [5] MALCEV, A. I. On a class of homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Translation* 39 (1951); *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 13 (1949), 9–32.

(Reçu le 25 juillet 2001)

Yu. S. Semenov

MIIT, division 'Applied Mathematics – 1'  
 Obraztsova 15  
 127994 Moscow  
 Russia  
 e-mail: yury\_semenov@hotmail.com

**vide-leer-empty**