

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE  
**Autor:** WUTHRICH, Christian  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65433>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.11.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

par Christian WUTHRICH

### 1. INTRODUCTION

Le sujet de ce travail est de construire un contre-exemple au principe de Hasse (voir par exemple [CCS]) pour la famille des quintiques de genre 1.

THÉORÈME 1.1. *La courbe projective plane  $C/\mathbf{Q}$ , de genre géométrique 1, ayant cinq points doubles et donnée par l'équation*

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &x^5 + y(-6x^4 + 10x^3y - x^2y^2 - 6xy^3 + y^4) \\ &+ z(4x^4 + 2x^3z - 5x^2z^2 - 2xz^3 + z^4) \\ &+ \frac{1}{16}yz(-224x^3 + 108x^2y + 116xy^2 + 10y^3 + 68x^2z \\ &\quad - 166xyz - 80y^2z + 160xz^2 + 81yz^2 - 56z^3) = 0, \end{aligned}$$

*possède des points lisses dans tous les complétés de  $\mathbf{Q}$ , mais aucun point rationnel.*

Dans les années 40, Lind [Li] et Reichardt [Re] ont montré par des contre-exemples que le principe ne s'applique pas aux courbes de genre 1. La cubique diagonale découverte par Selmer [Se],  $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ , est le contre-exemple le plus connu. Aujourd'hui, on connaît même des familles algébriques dont toutes les courbes sont de genre 1 et contredisent le principe de Hasse (voir [CP]).

Après avoir trouvé cette courbe et sa jacobienne, j'ai pris connaissance des travaux de T. A. Fisher, qui dans sa thèse [Fi] construit d'autres exemples de quintiques qui contredisent le principe de Hasse par une méthode différente de celle utilisée ici. Il obtient ses exemples comme torseurs de courbes elliptiques,

mais il doit apparemment se restreindre à des courbes elliptiques avec 5-torsion sur  $\mathbf{Q}$ .

La première partie de cet article décrit la méthode pour construire les courbes qui satisfont la condition géométrique, en utilisant des surfaces de Del Pezzo de degré 4. Après la construction du contre-exemple, la démonstration du théorème est expliquée en détail. J'aimerais attirer l'attention sur la démonstration du cas global qui contient des éléments originaux, comme l'examen simultané – *pour une même équation* – de deux éléments qui sont des normes : voir (4.1) et (4.2). Entièrement programmée sur ordinateur, elle a été appliquée à des familles de courbes pour tamiser un contre-exemple. La fin de l'article est réservée au calcul de la jacobienne  $E$  associée à cette quintique qui nous sert de contre-exemple. La normalisée de  $C$  représente alors un élément d'ordre 5 dans le groupe de Tate-Shafarevich  $\text{III}(E/\mathbf{Q})$ .

## 2. QUINTIQUES PLANES DE GENRE 1

Soit  $\omega$  un nombre algébrique de polynôme minimal

$$p(X) = g_0 + g_1 X + g_2 X^2 + g_3 X^3 + g_4 X^4 + X^5$$

sur  $\mathbf{Q}$ . Soit  $P_1 = (1 : \omega : \omega^2) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$  et soient  $P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$  ses conjugués sur  $\mathbf{Q}$ . On introduit la notation  $B$  pour la conique  $xz - y^2 = 0$  qui est définie par les  $P_i$ . Nous allons chercher toutes les quintiques  $C/\mathbf{Q}$  du plan ayant des points doubles en  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ . Pour cela nous considérons le système linéaire complet des cubiques passant par les points  $P_i$ . Prenons comme base les cubiques  $A_i/\mathbf{Q}$  suivantes :

$$A_0: x(xz - y^2) = 0, \quad A_1: y(xz - y^2) = 0, \quad A_2: z(xz - y^2) = 0,$$

$$A_3: g_0 x^3 + g_1 x^2 y + g_2 x^2 z + g_3 xyz + g_4 xz^2 + yz^2 = 0,$$

$$A_4: g_0 x^2 y + g_1 x^2 z + g_2 xyz + g_3 xz^2 + g_4 yz^2 + z^3 = 0.$$

Ceci donne une application birationnelle  $j$  de  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$  dans une surface  $S$  de Del Pezzo de degré 4 dans  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4$ , isomorphe au plan éclaté en les cinq points  $P_i$ , voir [Be].

Un petit calcul de syzygies montre que  $S$  est égale à l'intersection complète des deux quadriques

$$Q_0: x_0 x_4 - x_1 x_3 = g_1 x_0^2 + g_3 x_0 x_2 + x_2^2$$

$$Q_1: x_2 x_3 - x_1 x_4 = g_0 x_0^2 + g_2 x_0 x_2 + g_4 x_2^2$$

définies sur  $\mathbf{Q}$ .