

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ON AN ASSERTION IN RIEMANN'S HABILITATIONSVORTRAG
Autor: Di SCALA, Antonio J.
Kapitel: 4. Curvature zero 2-planes in warped products
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-65428>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROPOSITION 3.2. *Let $M(2, b) := S^2 \times H^2 \times T^b$. There exist local coordinates (u_1, \dots, u_{4+b}) on $M(2, b)$ such that $Q(\partial_i^u \wedge \partial_j^u) = 0$ for $1 \leq i < j \leq 4 + b$.*

Let ω be the volume form. Before beginning the proof of Proposition 3.2, we recall the following technical result and refer to [K, p. 6] for details:

LEMMA 3.3. *Let M^n be an orientable Riemannian manifold. Then around each point there exists a coordinate system $\{x_1, \dots, x_n\}$ such that $\omega(\partial_1^x, \dots, \partial_n^x) = 1$.*

Proof of Proposition 3.2. We use Lemma 3.3 to find local coordinates (x_1, x_2) and (y_1, y_2) on S^2 and H^2 such that $\omega(\partial_1^x, \partial_2^x) = 1$ and $\omega(\partial_1^y, \partial_2^y) = 1$. Let (z_1, \dots, z_b) be the usual flat coordinates on T^b . Define local coordinates on $S^2 \times H^2 \times T^b$ by:

$$u_1 := x_1 + y_1, \quad u_2 := x_1 - y_1, \quad u_3 := x_2 + y_2, \quad u_4 := x_2 - y_2,$$

and $u_{k+4} = z_k$ for $1 \leq k \leq b$. We then have

$$\partial_1^u = \partial_1^x + \partial_1^y, \quad \partial_2^u = \partial_1^x - \partial_1^y, \quad \partial_3^u = \partial_2^x + \partial_2^y, \quad \partial_4^u = \partial_2^x - \partial_2^y,$$

and $\partial_{4+k}^u = \partial_k^z$ for $k > 0$. If N is a Riemann surface with constant sectional curvature ϵ , then $\langle R(x, y)y, x \rangle = \epsilon \omega(x, y)$. Thus, the calculations performed in the proof of Proposition 3.1 show that $Q(\partial_i^u \wedge \partial_j^u) = 0$. \square

4. CURVATURE ZERO 2-PLANES IN WARPED PRODUCTS

We can use warped products to construct additional examples where Assertion 1.1 fails. We adopt the notation of [O, p. 210].

PROPOSITION 4.1. *Let $M = B \times_f F$ be a warped product, where B is a small open ball around $(0, 0)$ in \mathbf{R}^2 , where $f(x, y) = x + y + xy + 1$ is positive, and where $F = \mathbf{R}$. Then M is not flat. Furthermore $Q(\partial_x \wedge \partial_y) = 0$, $Q(\partial_x \wedge \partial_z) = 0$, and $Q(\partial_y \wedge \partial_z) = 0$.*

Proof. We use [O, p. 210, Proposition 42], to compute:

$$\begin{aligned} \langle R(\partial_x, \partial_y) \partial_x, \partial_z \rangle &= 0, & \langle R(\partial_x, \partial_z) \partial_x, \partial_z \rangle &= 0, \\ \langle R(\partial_y, \partial_z) \partial_y, \partial_z \rangle &= 0, & \langle R(\partial_x, \partial_z) \partial_z, \partial_y \rangle &= f. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 4.1 generalizes to higher dimensions by taking products with flat tori.