

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV  
**Autor:** Louvet, Nicolas  
**Kapitel:** 4.6 Constructions GNS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Preuve de (v).* Montrons d'abord qu'il existe un réel  $t_0 > 0$  tel que  $\frac{1-\lambda_t}{t}$  soit borné pour  $0 < t < t_0$ .

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par  $t$ , on peut supposer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \lambda_t}{t} \right) = +\infty.$$

Choisissons un  $g_0 \in G$  tel que  $\varphi_0(g_0) \neq 1$  et un voisinage ouvert relativement compact  $\mathcal{U}$  de  $g_0$  dans  $G$  tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \quad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction  $f \in L^1(G)$ , non nulle, positive et telle que  $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$ . L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t^\mathcal{W} - 1}{t}\right), f \right\rangle + \left(\frac{1 - \lambda_t}{t}\right) \left\langle \operatorname{Re}(\tilde{\varphi}_t^\mathcal{W} - \varphi_t^\mathcal{W}), f \right\rangle.$$

Grâce au choix de  $f$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \operatorname{Re}(\tilde{\varphi}_t^\mathcal{W} - \varphi_t^\mathcal{W}), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}(\varphi_0 - 1), f \right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t^\mathcal{W} - 1}{t}\right), f \right\rangle \leq 0.$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \lambda_t}{t}\right) = +\infty$ , grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re} \psi, f \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f \right\rangle = -\infty.$$

Comme  $\psi$  est continue et  $f$  est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \lambda_t}{t} \right) = \lambda,$$

avec  $\lambda \geq 0$  car  $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$ .

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5.  $\square$

## 4.6 CONSTRUCTIONS GNS

Fixons  $g \in G$ . En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x) \}$$

uniformément pour  $x$  parcourant les ensembles compacts de  $G$ .

On utilise alors l'égalité (4.3) pour trouver

$$\begin{aligned} & \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} (\varphi_t^W(g^{-1}xg) - \varphi_t^W(g^{-1}x) - \varphi_t^W(xg) + \varphi_t^W(x)) \right. \\ &\quad + \left( \frac{1-\lambda_t}{t} \right) (\tilde{\varphi}_t^W(g^{-1}xg) - \tilde{\varphi}_t^W(g^{-1}x) - \tilde{\varphi}_t^W(xg) + \tilde{\varphi}_t^W(x)) \\ &\quad \left. - \left( \frac{1-\lambda_t}{t} \right) (\varphi_t^W(g^{-1}xg) - \varphi_t^W(g^{-1}x) - \varphi_t^W(xg) + \varphi_t^W(x)) \right\} \end{aligned}$$

uniformément pour  $x$  parcourant les parties compactes de  $G$ . Pour tout  $t > 0$ , soit  $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$  (resp.  $(\tilde{\mathcal{H}}_t, \tilde{\pi}_t, \tilde{\xi}_t)$ ) le triple GNS associé à la fonction de type positif  $\varphi_t^W$  (resp.  $\tilde{\varphi}_t^W$ ). En posant

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}}(\pi_t(g)\xi_t - \xi_t), \quad \alpha_t^g = \tilde{\pi}_t(g)\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_t \quad \text{et} \quad \beta_t^g = \pi_t(g)\xi_t - \xi_t,$$

on trouve

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right. \\ &\quad + \left( \frac{1-\lambda_t}{t} \right) \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle \\ &\quad \left. - \left( \frac{1-\lambda_t}{t} \right) \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\} \end{aligned}$$

pour la topologie de la convergence compacte et donc aussi pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

**4.7. PROPOSITION.** *On pose  $\alpha_0^g = \pi_0(g)\xi_0 - \xi_0$  où  $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$  est le triple GNS associé à la fonction de type positif  $\varphi_0$  apparaissant dans la proposition 4.5 (iv). Pour le reste, on conserve les notations précédentes.*

- (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle = \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$  pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle = 0$  pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ;
- (iii) il existe une sous-suite de  $\varphi_t$ , toujours indexée par  $t$ , et une fonction de type positif  $\varphi^g$  telle que, pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \varphi^g.$$

*Preuve.* L'assertion (i) est une conséquence du fait que

$$\varphi_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^W = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \tilde{\xi}_t \mid \tilde{\xi}_t \rangle$$

pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , et que  $\varphi_0 = \langle \pi_0(\cdot) \xi_0 | \xi_0 \rangle$ . Grâce à 4.5 (ii) on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \xi_t | \xi_t \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^W = 1$$

pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g | \beta_t^g \rangle = 0$$

pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ . Enfin, en utilisant la compacité de  $E_0(G)$  pour la topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , on peut extraire une sous-suite telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g | \eta_t^g \rangle$  existe. On note cette limite  $\varphi^g$ .  $\square$

En passant à la limite dans (4.4), on écrit

$$(4.5) \quad \langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle = \varphi^g + \lambda \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g | \alpha_0^g \rangle.$$

Pour chaque  $g \in G$ , ceci fournit un candidat pour une décomposition du type (4.1) avec  $\chi^g = \lambda \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g | \alpha_0^g \rangle$ . Il reste à vérifier qu'il existe un élément  $g \in G$  tel que la fonction  $\varphi^g$  possède les bonnes propriétés.

**4.8. PROPOSITION.** *Si le cocycle  $b$  n'est pas un cobord, alors il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\varphi^g \not\equiv 0$ .*

*Preuve.* Si  $\varphi^g \equiv 0$  pour tout  $g \in G$ , alors d'une part

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle\|_\infty &= \sup_{x \in G} |\langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle| \\ &= \langle \pi_\psi(e) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle \\ &= -2 \psi(g) = 2 \|b(g)\|^2, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle\|_\infty &= \lambda \langle \pi_0(e) \alpha_0^g | \alpha_0^g \rangle \\ &= \lambda \langle \pi_0(g) \xi_0 - \xi_0 | \pi_0(g) \xi_0 - \xi_0 \rangle \\ &= 2\lambda (1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g)) \end{aligned}$$

pour tout  $g \in G$ . La fonction de type positif  $\varphi_0$  est bornée; l'égalité  $\|b(g)\|^2 = \lambda(1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g))$  implique que  $b$  est un cocycle borné sur  $G$ , donc un cobord.  $\square$

Pour la suite, on fixe un élément  $g \in G$  tel que  $\varphi^g \not\equiv 0$ .

4.9. PROPOSITION. *Les fonctions de type positif  $\langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g | \eta_t^g \rangle$  sont uniformément bornées pour  $t > 0$ , autrement dit*

$$\sup_{t>0} \sup_{x \in G} |\langle \pi_t(x) \eta_t^g | \eta_t^g \rangle| < \infty.$$

*Preuve.* On a

$$\sup_{x \in G} |\langle \pi_t(x) \eta_t^g | \eta_t^g \rangle| = \langle \pi_t(e) \eta_t^g | \eta_t^g \rangle = \|\eta_t^g\|^2.$$

On va montrer que  $\langle \eta_t^g | \eta_t^g \rangle$  est borné pour  $t > 0$ . Pour cela, écrivons l'égalité (4.4) au point  $x = e$ ,

$$\|b_\psi(g)\|^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \langle \eta_t^g | \eta_t^g \rangle + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \alpha_t^g | \alpha_t^g \rangle - \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \beta_t^g | \beta_t^g \rangle \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t^g | \alpha_t^g \rangle - \langle \beta_t^g | \beta_t^g \rangle \\ = \left\{ 2 - 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{\pi}_t(g) \tilde{\xi}_t | \tilde{\xi}_t \rangle \right\} - \left\{ 2 - 2 \operatorname{Re} \langle \pi_t(g) \xi_t | \xi_t \rangle \right\} \\ = 2 \operatorname{Re} (\varphi_t^W(g) - \tilde{\varphi}_t^W(g)), \end{aligned}$$

et les suites

$$\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right), \quad |\varphi_t^W(g)| \quad \text{et} \quad |\tilde{\varphi}_t^W(g)|$$

sont bornées en  $t$ . Donc la suite  $\langle \eta_t^g | \eta_t^g \rangle$  est également bornée.  $\square$

4.10. PROPOSITION. *La fonction  $\varphi^g$  est limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes de fonctions de type positif associées à des représentations de  $\tilde{\mathcal{V}}$ .*

*Preuve.* Grâce aux propositions 4.7 (iii) et 4.9, la fonction de type positif  $\varphi^g$  est limite pour la topologie  $*$ -faible de fonctions de type positif uniformément bornées associées aux représentations  $\pi_t$ . Ceci implique ([Fel1], Lemma 1.5) qu'il existe une suite  $\theta_t$  de fonctions de type positif associées aux représentations  $\pi_t$  telle que

$$\varphi^g = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_t$$

uniformément sur les compacts de  $G$ .

De plus,  $\pi_t$  est la représentation GNS associée à la fonction de type positif  $\varphi_t^W$  qui, d'après 4.5 (iii), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons

convexes d'éléments de  $\mathcal{W} \cap P(G)$ . Donc les fonctions de type positif associées à  $\pi_t$  sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de  $\mathcal{W} \cap P(G)$ . Finalement,  $\varphi^g$  est elle-même limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$ . Comme les fonctions de type positif appartenant à  $\mathcal{V}$  sont associées aux représentations de  $\tilde{\mathcal{V}}$ , ceci termine la preuve de la proposition.  $\square$

On a donc établi une décomposition de la fonction  $\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) | b_\psi(g) \rangle$  comme annoncé en 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [BeHa] BEKKA, M. et P. DE LA HARPE. Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière. *Bull. Soc. Math. France* 122 (1994), 333–342.
- [BeKa] BEKKA, M. et E. KANIUTH. Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation. *J. reine angew. Math.* 385 (1988), 203–220.
- [BeLo] BEKKA, M. et N. LOUVET. On a variant of Kazhdan's property (T) for subgroups of semisimple groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 47 (1997), 1065–1078.
- [BLM] BOIDOL, J., J. LUDWIG et D. MÜLLER. On infinitely small orbits. *Studia Math.* 88 (1988), 1–11.
- [CoSt] COWLING, M. et T. STEGER. The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices. *J. reine angew. Math.* 420 (1991), 85–98.
- [Cho] CHOQUET, G. *Lectures on Analysis, Vol. 2*. W. A. Benjamin, 1969.
- [Dav] DAVIDSON, K. R. *C\*-Algebras by Example*. Fields Institute Monographs 6. Amer. Math. Soc., 1996.
- [Del] DELORME, P. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles — Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France* 105 (1977), 281–336.
- [Dix] DIXMIER, J. *Les C\*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1969.
- [Fel1] FELL, J. M. G. The dual spaces of  $C^*$ -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 94 (1960), 365–403.
- [Fel2] —— Weak containment and induced representations of groups. *Canad. J. Math.* 14 (1962), 237–268.
- [Gui1] GUICHARDET, A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations. *J. Multivariate Anal.* 6 (1976), 138–158.
- [Gui2] —— Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Sci. Math.* (2) 96 (1972), 305–332.
- [HaVa] DE LA HARPE, P. et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Astérisque 175. Soc. Math. de France, 1989.