Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 4.5. PROPOSITION. On conserve les notations précédentes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

On a

$$\varphi_t = \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$
$$= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\mu_t(\mathcal{W}))\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} .$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$\text{(4.3)} \qquad \frac{\varphi_t - 1}{t} = \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\lambda_t)\,\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}$$
$$= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1-\lambda_t}{t}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - {\varphi_t}^{\mathcal{W}}\right) .$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0} \lambda_t = 1$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ *uniformément sur tout compact;*

(iii) *pour tout* $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ *est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de* $\mathcal{V}$.

De plus, pour une sous-suite de φ_t *que l'on indexe encore par* t,

(iv) *il existe une fonction* $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ *pour la topologie* $*$*-faible;*

(v) *il existe un nombre réel positif* λ *tel que* $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit* K *un compact convexe dans un espace métrisable. Soient* $\varphi \in \operatorname{ex} K$ *un point extrémal de* K *et* φ_t *une suite d'éléments de* K *telle que* $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. *Pour chaque* t, *on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta \, d\mu_t(\eta)$$

où μ_t *est une mesure de probabilité supportée par* $\operatorname{ex} K$. *Alors, pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* φ *dans* K, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \mu_t\,(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1 .$$

Preuve. L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge faiblement sur K vers une mesure μ. La suite φ_t converge vers φ qui est un point extrémal, donc

$$\varphi = \int_{\mathrm{ex}\,K} \eta \, d\mu(\eta)$$

et la mesure μ coïncide avec la mesure de Dirac δ_φ au point φ (Proposition 26.3 de [Cho]). De plus, toute sous-suite convergente de (μ_t) admet δ_φ comme limite. Autrement dit, δ_φ est l'unique point adhérent de la suite (μ_t) et $\lim\limits_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage $\mathcal{W}$ contenant φ. La mesure μ_t est supportée par $\mathrm{ex}\,K$, donc

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \mathrm{ex}\,K) = 1$$

comme annoncé. $\square$

Preuve de (i). C'est une conséquence du lemme ci-dessus. En effet,

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = \lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \mathrm{ex}\,E_0(G)) = 1\,.$$

Preuve de (ii). Les fonctions $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à l'ensemble $E(G)$ sur lequel les topologies $*$-faible et de la convergence compacte coïncident. Il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(G)$, on a

$$\langle \varphi_t, f\rangle = \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f\rangle \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \langle \eta, f\rangle \, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t, f\rangle = \langle 1, f\rangle\,.$$

Le lemme implique que

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \mu_t(E_0(G)\setminus\mathcal{W}) = 0\,,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \Big(\langle \varphi_t, f\rangle - \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \langle \eta, f\rangle \, d\mu_t(\eta) \Big) = \langle 1, f\rangle\,.$$

Preuve de (iii). Pour une partie A de $E_0(G)$, on désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A dans $E_0(G)$ pour la topologie $*$-faible et $\mathrm{co}\,A$ son enveloppe convexe. Posons

$$K_{\mathcal{W}} := \overline{\mathrm{co}(\mathcal{W} \cap P(G))}$$

et considérons la mesure $\mu_t^{\mathcal{W}}$, supportée par $\mathcal{W} \cap P(G)$, donnée par

$$\mu_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap \mathcal{W})}{\mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Ceci détermine une mesure de probabilité sur le compact convexe $K_{\mathcal{W}}$ telle que

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \int_{K_{\mathcal{W}}} \eta \, d\mu_t^{\mathcal{W}}(\eta)\,.$$

La proposition 26.3 de [Cho] implique que $\varphi_t^{\mathcal{W}} \in K_{\mathcal{W}}$. Autrement dit, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit comme limite pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Or $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartient à $E(G)$ et $\mathrm{co}(\mathcal{W} \cap P(G)) \subset E(G)$ sur lequel les topologies de la convergence compacte et $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ coïncident, donc la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

Preuve de (iv). Comme la suite $(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}})$ est contenue dans $E_0(G)$ qui est compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, il existe une sous-suite, encore indexée par t, et un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Supposons que $\varphi_0 \equiv 1$. En particulier, on peut supposer que les fonctions $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$ qui apparaissent dans la sous-suite considérée sont toutes non nulles. Considérons la mesure $\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}$ définie par

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap (E_0(G) \backslash \mathcal{W}))}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Cette mesure est supportée par $(E_0(G) \backslash \mathcal{W}) \cap P(G)$, et donne pour tout t une décomposition de Choquet de $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$.

Puisque $\varphi_0 \equiv 1$ est un point extrémal, la mesure de probabilité μ_0 qui donne une décomposition de Choquet de φ_0 est la mesure de Dirac en 1 et vérifie

$$\mu_0 = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}\,.$$

Par conséquent,

$$1 = \mu_0(\mathcal{W}) = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = 0\,,$$

ce qui est absurde.

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t, on peut supposer que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de g_0 dans G tel que

$$\mathrm{Re}\,(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\mathrm{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\Big\langle \mathrm{Re}\big(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\big), f\Big\rangle = \Big\langle \mathrm{Re}\big(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\big), f\Big\rangle + \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\Big\langle \mathrm{Re}\big(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\big), f\Big\rangle .$$

Grâce au choix de f, on a

$$\lim_{t\to 0}\big\langle \mathrm{Re}\big(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\big), f\big\rangle = \big\langle \mathrm{Re}\big(\varphi_0 - 1\big), f\big\rangle < 0$$

et

$$\Big\langle \mathrm{Re}\big(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\big), f\Big\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim_{t\to 0}\big(\frac{1-\lambda_t}{t}\big) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\big\langle \mathrm{Re}\,\psi, f\big\rangle = \lim_{t\to 0}\Big\langle \mathrm{Re}\big(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\big), f\Big\rangle = -\infty .$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\big\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\big\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big\{\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\big\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G.