

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV  
**Autor:** Louvet, Nicolas  
**Kapitel:** 4.4 Localisation  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$f(x) = \int_K f(y) d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue  $f$  sur  $F$  ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément  $x$  de  $K$  peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout  $x \in K$  il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $K$ , supportée par  $\text{ex } K$ , telle que

$$x = \int_K y d\mu(y)$$

au sens  $*$ -faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point  $x$  (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où  $x$  est lui-même un point extrémal, la mesure  $\mu$  qui donne une décomposition de Choquet du point  $x$  est unique et donnée par la mesure de Dirac  $\delta_x$  au point  $x$  ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble  $E_0(G)$  défini au numéro 3.2, il existe pour tout  $t > 0$  une mesure de probabilité  $\mu_t$  supportée par  $P(G) \cup \{0\}$  telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta d\mu_t(\eta)$$

au sens faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta)$$

pour tout  $f \in L^1(G)$  (voir [Dix], proposition 13.6.8).

#### 4.4 LOCALISATION

On note  $\mathcal{V}$  le voisinage de la fonction 1 dans  $P(G)$  qui est l'image inverse de  $\tilde{\mathcal{V}}$  par l'application

$$P(G) \longrightarrow \hat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi.$$

On va décomposer les fonctions de type positif  $\varphi_t$  de la façon suivante. Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de la fonction constante 1 dans  $E_0(G)$  tel que  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = 1$ , on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que  $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$ . On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta)$$

et

$$\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) \\ &= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}.\end{aligned}$$

En posant  $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$ , on obtient

$$(4.3) \quad \begin{aligned}\frac{\varphi_t - 1}{t} &= \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \lambda_t)\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} \\ &= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1 - \lambda_t}{t} \left( \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}} \right).\end{aligned}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

- (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_t = 1$ ;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$  uniformément sur tout compact;
- (iii) pour tout  $t > 0$ ,  $\varphi_t^{\mathcal{W}}$  est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de  $\mathcal{V}$ .

De plus, pour une sous-suite de  $\varphi_t$  que l'on indexe encore par  $t$ ,

- (iv) il existe une fonction  $\varphi_0 \in E_0(G)$ ,  $\varphi_0 \not\equiv 1$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$  pour la topologie \*-faible;

- (v) il existe un nombre réel positif  $\lambda$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \lambda_t}{t} \right) = \lambda$ .

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit  $K$  un compact convexe dans un espace métrisable. Soient  $\varphi \in \text{ex } K$  un point extrémal de  $K$  et  $\varphi_t$  une suite d'éléments de  $K$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = \varphi$ . Pour chaque  $t$ , on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta d\mu_t(\eta)$$

où  $\mu_t$  est une mesure de probabilité supportée par  $\text{ex } K$ . Alors, pour tout voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\varphi$  dans  $K$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \text{ex } K) = 1.$$

*Preuve.* L'ensemble  $\mathcal{M}(K)$  des mesures de probabilité sur  $K$  est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite  $\mu_{t_k}$  de  $\mu_t$  qui converge