Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 47 (2001)

**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

Autor: Louvet, Nicolas

Kapitel: 4.3 DÉCOMPOSITION DE CHOQUET

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-65439

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 29.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

le support de  $\rho$  est contenu dans l'adhérence de  $\widetilde{\mathcal{V}}$  pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que  $\rho$  est une sous-représentation de la représentation GNS associée à  $\psi^g$ , qui est elle-même une sous-représentation de  $\pi_{\psi}$ ; et  $\pi_{\psi}$  est une sous-représentation de  $\pi \oplus \overline{\pi}$ . Quitte à échanger les rôles de  $\pi$  et  $\overline{\pi}$  (ce qui peut se faire sans perte de généralité car  $H^1(G,\pi) \neq 0$  si et seulement si  $H^1(G,\overline{\pi}) \neq 0$  et supp  $\pi \subset \operatorname{cor} G$  si et seulement si  $\operatorname{supp} \overline{\pi} \subset \operatorname{cor} G$ ), on peut supposer que  $\rho$  possède une sous-représentation  $\sigma$  qui est équivalente à une sous-représentation de  $\pi$ .

Le support de  $\sigma$  est dans l'adhérence de  $\widetilde{\mathcal{V}}$ , puisqu'il est contenu dans le support de  $\rho$ . Comme  $\pi$  est une représentation factorielle,  $\sigma$  et  $\pi$  sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\operatorname{supp} \pi = \operatorname{supp} \sigma \subset \overline{\widetilde{\mathcal{V}}} \,.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de  $\widetilde{\mathcal{V}}$ , le support de  $\pi$  est contenu dans le cortex de G.

# 4.2 Théorème de Schoenberg

Soit  $\psi$  une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G. Pour tout nombre réel t > 0, la fonction  $\varphi_t$  définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

(4.2) 
$$\lim_{t \to 0} \varphi_t = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

## 4.3 DÉCOMPOSITION DE CHOQUET

On dit qu'une mesure  $\mu$  sur un espace  $\Omega$  est *supportée* par une partie mesurable  $A\subset\Omega$  si  $\mu(\Omega\setminus A)=0$ .

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F. On note ex K l'ensemble des points extrémaux de K. Une mesure de probabilité  $\mu$  supportée par ex K détermine un unique élément  $x \in K$  donné par la formule

$$x = \int_K y \, d\mu(y) \,,$$

entendue au sens \*-faible, c'est-à-dire au sens où

$$f(x) = \int_{K} f(y) \, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout  $x \in K$  il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur K, supportée par ex K, telle que

$$x = \int_{\mathcal{V}} y \, d\mu(y)$$

au sens \*-faible. Une telle décomposition est appelée décomposition de Choquet du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure  $\mu$  qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac  $\delta_x$  au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble  $E_0(G)$  défini au numéro 3.2, il existe pour tout t > 0 une mesure de probabilité  $\mu_t$  supportée par  $P(G) \cup \{0\}$  telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta \, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible  $\sigma(L^{\infty}, L^{1})$ , c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta)$$

pour tout  $f \in L^1(G)$  (voir [Dix], proposition 13.6.8).

## 4.4 LOCALISATION

On note  $\mathcal V$  le voisinage de la fonction 1 dans P(G) qui est l'image inverse de  $\widetilde{\mathcal V}$  par l'application

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G} \colon \varphi \longmapsto \pi_{\varphi} .$$

On va décomposer les fonctions de type positif  $\varphi_t$  de la façon suivante. Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de la fonction constante 1 dans  $E_0(G)$  tel que  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$ . Puisque  $\lim_{t \to 0} \varphi_t = 1$ , on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que  $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$ . On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$