

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV  
**Autor:** Louvet, Nicolas  
**Kapitel:** 3.5 COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de  $\mathcal{S}$ . Avec ces définitions, une suite (généralisée)  $\pi_n$  de représentations unitaires de  $G$  converge vers  $\pi$  si et seulement si, pour toute sous-suite infinie  $\pi_{n'}$  de  $\pi_n$ ,  $\pi$  est faiblement contenue dans  $\{\pi_{n'}\}$ .

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur  $\widehat{G}$  n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante,  $P(G)$  étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si  $\pi$  est une représentation irréductible et  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble de  $\widehat{G}$ , alors  $\pi$  est faiblement contenue dans  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\pi$  est dans l'adhérence de  $\mathcal{S}$  pour la topologie de Fell.

### 3.5 COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES

Une *action par isométries affines* du groupe  $G$  sur un espace de Hilbert affine  $\mathcal{H}$  est un morphisme  $\alpha$  de  $G$  dans le groupe  $\text{Iso}(\mathcal{H})$  des isométries affines de  $\mathcal{H}$  tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}: (g, \xi) \longmapsto \alpha(g) \xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine  $\mathcal{H}$  à l'espace de Hilbert de ses translations. Si  $\alpha$  est une action par isométries affines alors, pour tout  $g$  dans  $G$  et tout élément  $\xi$  de  $\mathcal{H}$ , on peut écrire

$$\alpha(g) \xi = \pi(g) \xi + b(g)$$

où  $\pi(g)$  est un opérateur linéaire unitaire et  $b(g) \in \mathcal{H}$ . En imposant la continuité et la condition de morphisme pour  $\alpha$ , on trouve d'une part que  $\pi$  est une représentation unitaire de  $G$  sur  $\mathcal{H}$ , appelée partie linéaire de  $\alpha$ , et d'autre part que  $b$  est une application continue de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x) b(y) \quad \text{pour tous } x, y \in G.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}$  et d'une application continue  $b$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  vérifiant la condition de cocycle par rapport à  $\pi$  définit une action par isométries affines  $\alpha$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}$ , par la formule  $\alpha(g) \xi = \pi(g) \xi + b(g)$ .

Pour  $\alpha$ ,  $\pi$  et  $\beta$  comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

- (i)  $\alpha$  possède un point fixe;
- (ii)  $\alpha$  possède une orbite bornée;
- (iii) toute orbite de  $\alpha$  est bornée;
- (iv) le cocycle  $b$  associé à  $\alpha$  est borné;
- (v) le cocycle  $b$  associé à  $\alpha$  est un cobord.

### 3.6 FONCTIONS CONDITIONNELLEMENT DE TYPE POSITIF

Si  $b: G \rightarrow \mathcal{H}$  est un cocycle continu pour la représentation  $\pi$  alors la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \quad \text{pour tout } g \in G,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$ , pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , on a

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_j \lambda_i \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0.$$

La fonction  $\psi$  est normalisée ( $\psi(e) = 0$ ) et symétrique ( $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ ). Réciproquement, à une telle fonction continue  $\psi$ , on associe le triple GNS  $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$  où  $\pi_\psi$  est une représentation orthogonale de  $G$  dans l'espace de Hilbert réel  $\mathcal{H}_\psi$  et  $b_\psi$  est un cocycle à coefficients dans  $\mathcal{H}_\psi$  tel que, d'une part, le sous-espace engendré par  $b_\psi(G)$  est dense dans  $\mathcal{H}_\psi$ , et d'autre part, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2} \|b_\psi(g)\|^2.$$

Pour rappel, si  $V$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $f: \cdot G \rightarrow \mathbf{R}$  de support fini et telles que  $\sum_{x \in G} f(x) = 0$  alors  $\mathcal{H}_\psi$  est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant  $V$  pour la forme bilinéaire

$$\langle f | h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x) h(y) \psi(y^{-1}x)$$

et  $b_\psi$  applique  $g \in G$  sur la classe dans  $\mathcal{H}_\psi$  de la différence des fonctions caractéristique de  $g$  et  $e$ . La représentation  $\pi_\psi$  est déduite de l'action par multiplication à gauche de  $G$  sur  $V$ .

Soit  $\pi$  une représentation,  $b$  un 1-cocycle à coefficients dans  $\pi$  et  $\psi = -\|b\|^2$  la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On