Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

Autor: Louvet, Nicolas

Kapitel: 3.4 Topologie sur le dual

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans $\mathcal{H}_\varphi$ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\, \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle .$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ. Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{C}$ de support fini alors $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, \overline{h(y)}\, \varphi(y^{-1}x) .$$

Cette construction possède les propriétés suivantes:

(1) si φ, ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;

(2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible;

(3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;

(4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π.

3.4 Topologie sur le dual

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble Rep(G) des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π. On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, x \in K .$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans Rep(G) (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible: la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite, pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de $\mathcal{S}$. Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentations unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite infinie $\pi_{n'}$ de π_n, π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur $\widehat{G}$ n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}\colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante, $P(G)$ étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au § 3.2. De plus, si π est une représentation irréductible et $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\widehat{G}$, alors π est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$ si et seulement si π est dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ pour la topologie de Fell.

3.5 Cohomologie et actions affines

Une *action par isométries affines* du groupe G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ est un morphisme α de G dans le groupe $\mathcal{I}so(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\colon (g,\xi) \longmapsto \alpha(g)\,\xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ à l'espace de Hilbert de ses translations. Si α est une action par isométries affines alors, pour tout g dans G et tout élément ξ de $\mathcal{H}$, on peut écrire

$$\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$$

où $\pi(g)$ est un opérateur linéaire unitaire et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α, on trouve d'une part que π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$, appelée partie linéaire de α, et d'autre part que b est une application continue de G dans $\mathcal{H}$ qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous } x,\, y \in G\,.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire π de G sur $\mathcal{H}$ et d'une application continue b de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de cocycle par rapport à π définit une action par isométries affines α de G sur $\mathcal{H}$, par la formule $\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$.