

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 3.4 Topologie sur le dual
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans \mathcal{H}_φ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g) \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle.$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ . Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ de support fini alors \mathcal{H}_φ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x) \overline{h(y)} \varphi(y^{-1}x).$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

- (1) si φ , ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;
- (2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible ;
- (3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;
- (4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π .

3.4 TOPOLOGIE SUR LE DUAL

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble $\text{Rep}(G)$ des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G . Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G , et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π . On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions ψ_1, \dots, ψ_n , chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ , telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall x \in K.$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans $\text{Rep}(G)$ (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble \mathcal{S} de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite,

pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de \mathcal{S} . Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentations unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite infinie $\pi_{n'}$ de π_n , π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur \widehat{G} n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante, $P(G)$ étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si π est une représentation irréductible et \mathcal{S} est un sous-ensemble de \widehat{G} , alors π est faiblement contenue dans \mathcal{S} si et seulement si π est dans l'adhérence de \mathcal{S} pour la topologie de Fell.

3.5 COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES

Une *action par isométries affines* du groupe G sur un espace de Hilbert affine \mathcal{H} est un morphisme α de G dans le groupe $\text{Iso}(\mathcal{H})$ des isométries affines de \mathcal{H} tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}: (g, \xi) \longmapsto \alpha(g) \xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine \mathcal{H} à l'espace de Hilbert de ses translations. Si α est une action par isométries affines alors, pour tout g dans G et tout élément ξ de \mathcal{H} , on peut écrire

$$\alpha(g) \xi = \pi(g) \xi + b(g)$$

où $\pi(g)$ est un opérateur linéaire unitaire et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α , on trouve d'une part que π est une représentation unitaire de G sur \mathcal{H} , appelée partie linéaire de α , et d'autre part que b est une application continue de G dans \mathcal{H} qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x) b(y) \quad \text{pour tous } x, y \in G.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire π de G sur \mathcal{H} et d'une application continue b de G dans \mathcal{H} vérifiant la condition de cocycle par rapport à π définit une action par isométries affines α de G sur \mathcal{H} , par la formule $\alpha(g) \xi = \pi(g) \xi + b(g)$.