Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

Autor: Louvet, Nicolas

Kapitel: 3.3 Construction GNS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

$$\mathcal{W}(\varphi;\varepsilon,K)=\left\{\psi\in \mathrm{L}^\infty(G)\ :\ \sup_{g\in K}|\varphi(g)-\psi(g)|<\varepsilon\right\}$$

où ε est un nombre strictement positif et K une partie compacte du groupe G.

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie $*$-faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions f_n sur le groupe additif $\mathbf{R}$ qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[\frac{1}{n},+\infty[$. Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$ alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble $E_0(G)$ est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie $*$-faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore $G=S^1$ et pour tout $n\in\mathbf{Z}$, le caractère

$$\chi_n\colon S^1\longrightarrow \mathbf{C}\colon z\longmapsto z^{-n}$$

pour $z=e^{2\pi i t}\in S^1$. Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie $*$-faible : pour $f\in \mathrm{L}^1(S^1)$, $\langle\chi_n,f\rangle$ coïncide avec le coefficient de Fourier $\widehat{f}(n)$ de f au point n qui tend vers zéro pour n tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de (χ_n) ne peut converger uniformément vers zéro car $\sup_{z\in S^1}|\chi_n(z)|=1$.

On note $E(G)$ l'ensemble des *états* de G : il s'agit des fonctions φ de type positif sur G pour lesquelles $\varphi(e)=1$. Raikov a montré que, sur $E(G)$, les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie $*$-faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe S^1 mais leur limite pour la topologie $*$-faible vaut zéro au neutre.

Si $\operatorname{ex}E_0(G)$ désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe $E_0(G)$, on note $P(G)=(\operatorname{ex}E_0(G))\setminus\{0\}$ et on observe que $P(G)\subset E(G)$. Les éléments de $P(G)$ s'appellent les *états purs*. Comme $E_0(G)$ est convexe et compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty,\mathrm{L}^1)$, le théorème de Krein-Milman nous dit que $E_0(G)$ est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier, $P(G)$ est non vide.

3.3 Construction GNS

Si $\pi\colon G\to\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G et $\xi\in\mathcal{H}$, alors la fonction $\varphi(g)=\langle\pi(g)\xi\mid\xi\rangle$ est une fonction de type positif sur G telle que $\varphi(e)=\|\xi\|^2$. Une telle fonction est dite *associée* à la représentation π. Réciproquement, pour toute fonction φ non-nulle de type positif, il existe un triple $(\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi)$ où $\pi_\varphi\colon G\to\mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$ est une représentation unitaire de G

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans $\mathcal{H}_\varphi$ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \left\langle \pi_\varphi(g)\, \xi_\varphi \;\middle|\; \xi_\varphi \right\rangle .$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ. Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f \colon G \to \mathbf{C}$ de support fini alors $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, \overline{h(y)}\, \varphi(y^{-1}x) .$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

(1) si φ, ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;

(2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible;

(3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;

(4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π.

3.4 Topologie sur le dual

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble $\mathrm{Rep}(G)$ des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π. On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, x \in K .$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans $\mathrm{Rep}(G)$ (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible: la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite,