Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 3.1 Représentations irréductibles et factorielles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

3. Représentations, cohomologie et fonctions (conditionnellement) de type positif

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

3.1 Représentations irréductibles et factorielles

Pour un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in \mathcal{S}\}$ le *commutant* de $\mathcal{S}$.

Soit π une représentation unitaire irréductible du groupe G sur l'espace $\mathcal{H}$. Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de π signifie que le commutant $\pi(G)'$ de l'ensemble $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ est réduit aux opérateurs scalaires. Comme $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$, on a $\mathcal{N}_\pi' \subset \pi(G)'$. Ainsi, le centre $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}_\pi'$ de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur $\mathcal{H}$. Ceci montre qu'une représentation irréductible π est factorielle.

3.2 Fonctions de type positif

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact G une fonction continue φ sur G à valeurs complexes telle que, pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, la matrice $\left(\varphi(g_j^{-1} g_i)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est hermitienne positive: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0 .$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si φ est une fonction de type positif alors, pour tout $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$ et $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ où e désigne l'élément neutre du groupe G. On note $E_0(G)$ l'ensemble des fonctions de type positif φ sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$. C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace $\mathrm{L}^\infty(G)$ des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur G.

Sur $\mathrm{L}^\infty(G)$, on considère les deux topologies suivantes: d'une part, la topologie $*$-faible ou topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ donnée par les semi-normes

$$p_f \colon \mathrm{L}^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+ : \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où $f \in \mathrm{L}^1(G)$ et $\langle \varphi, f \rangle = \displaystyle\int_G \varphi(g) f(g)\, dg$; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction φ est donné par les ensembles