

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV  
**Autor:** Louvet, Nicolas  
**Kapitel:** 3.1 Représentations irréductibles et factorielles  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. REPRÉSENTATIONS, COHOMOLOGIE ET FONCTIONS (CONDITIONNELLEMENT) DE TYPE POSITIF

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

#### 3.1 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET FACTORIELLES

Pour un ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'opérateurs sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , on note  $\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in \mathcal{S}\}$  le *commutant* de  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible du groupe  $G$  sur l'espace  $\mathcal{H}$ . Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de  $\pi$  signifie que le commutant  $\pi(G)'$  de l'ensemble  $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$  est réduit aux opérateurs scalaires. Comme  $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$ , on a  $\mathcal{N}_\pi' \subset \pi(G)'$ . Ainsi, le centre  $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}_\pi'$  de l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{N}_\pi$  est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur  $\mathcal{H}$ . Ceci montre qu'une représentation irréductible  $\pi$  est factorielle.

#### 3.2 FONCTIONS DE TYPE POSITIF

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact  $G$  une fonction continue  $\varphi$  sur  $G$  à valeurs complexes telle que, pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$ , la matrice  $(\varphi(g_j^{-1}g_i))_{1 \leq i,j \leq n}$  est hermitienne positive : pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$  et pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ , on a

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1}g_i) \geq 0.$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si  $\varphi$  est une fonction de type positif alors, pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$  et  $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$  où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $G$ . On note  $E_0(G)$  l'ensemble des fonctions de type positif  $\varphi$  sur  $G$  telle que  $\varphi(e) \leq 1$ . C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace  $L^\infty(G)$  des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur  $G$ .

Sur  $L^\infty(G)$ , on considère les deux topologies suivantes : d'une part, la topologie  $*$ -faible ou topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  donnée par les semi-normes

$$p_f: L^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+: \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où  $f \in L^1(G)$  et  $\langle \varphi, f \rangle = \int_G \varphi(g)f(g)dg$ ; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction  $\varphi$  est donné par les ensembles