L'Enseignement Mathématique, t. 47 (2001), p. 287–314

A PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

par Nicolas LOUVET *)

RÉSUMÉ. On présente et généralise un résultat de Vershik et Karpushev qui établit un lien entre la 1-cohomologie des représentations unitaires d'un groupe G et la topologie de Fell au voisinage de la représentation triviale du groupe.

1. INTRODUCTION

Considérons un groupe localement compact G et une représentation continue π de G par des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un morphisme π de G dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$: $(g, \xi) \mapsto \pi(g)\,\xi$ soit continue. On note $\mathrm{Z}^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des *cocycles* continus de G à coefficients dans π, c'est-à-dire des applications continues $b \colon G \to \mathcal{H}$ telles que

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in G\,.$$

On désigne par $\mathrm{B}^1(G, \pi)$ l'ensemble des *cobords* qui sont les cocycles de la forme

$$b(x) = \pi(x)\,\xi - \xi \qquad \text{pour tout } x \in G\,,$$

où ξ est un vecteur de $\mathcal{H}$. Le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π est le quotient

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) = \mathrm{Z}^1(G, \pi)/\mathrm{B}^1(G, \pi)\,.$$

Ce groupe est associé aux actions par isométries affines de G sur $\mathcal{H}$ admettant π comme partie linéaire (voir ci-dessous § 3.5).

*) Financé par la requête 20-56816.99 du Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.