Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES
Autor: Berteloot, François / Duval, Julien
Kapitel: 4. Complémentaire d'une courbe à trois composantes dans $P^2(C)$
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65437

Le cas général se discute de manière analogue en groupant les composantes de ϕ identiques en module. Ainsi on ne retiendra par exemple de Y que les faces Y_{ij} pour $|\phi_i| \neq |\phi_j|$. □

REMARQUES.

1) On peut supposer de plus α réel dans la limite exponentielle g. Si ce n'est pas le cas, voici comment construire une limite de g (et donc de f) satisfaisant cette propriété: considérons l'enveloppe convexe des α_i significatifs (ceux correspondant à des coefficients $c_i \neq 0$) dans l'écriture de g; quitte à reparamétrer g, on suppose cette enveloppe contenue dans le demi-plan supérieur avec une arête réelle: par exemple α_i réel pour $i \leq p$ et $Im(\alpha_i) > 0$ pour $i > p$; de $g(z+in) = [e^{i\alpha n}ce^{\alpha z}]$ on extrait une sous-suite convergeant vers $h(z) = [c_1e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_pe^{\alpha_p z} : 0 : \ldots : 0]$ qui convient.

2) Ce théorème contient celui de Green: en effet, soit $f(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ omettant $2k+1$ hyperplans en position générale, d'équations $(l_i = 0)$. En considérant $\Phi = [l_1 : \ldots : l_{2k+1}]$ le plongement correspondant dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$, la courbe entière $\Phi \circ f$ évite maintenant les hyperplans de coordonnées. Elle possède une limite de la forme suivante, quitte à permuter et prendre des multiples des formes linéaires l_i :

$$g(z) = [e^{\alpha_1 z} : \ldots : e^{\alpha_q z} : 0 : \ldots : 0] \text{ avec } \alpha_i = \alpha_1 \text{ ssi } i \leq p .$$

Par position générale, chacune des formes linéaires l_i est toujours combinaison de $k+1$ autres; il en est donc de même pour les composantes de Φ. Ceci entraine que $p \leq k$: sinon toute composante de g serait proportionnelle à $e^{\alpha_1 z}$ et g serait constante. Mais, d'un autre côté, la première composante de g doit être combinaison des $k+1$ dernières, soit:

$$e^{\alpha_1 z} = \sum_{i \geq k+1} \lambda_i e^{\alpha_i z} .$$

Or on a dans cette égalité $\alpha_i \neq \alpha_1$ puisque $p \leq k$. C'est impossible.

4. COMPLÉMENTAIRE D'UNE COURBE À TROIS COMPOSANTES DANS $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Nous appliquons ce qui précède à l'étude de l'hyperbolicité du complémentaire de trois courbes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (comparer avec [5], [6]).

THÉORÈME. *Le plan projectif privé d'une courbe C à 3 composantes, générique, de degré au moins 5, est hyperbolique.*

Ici la généricité signifie d'une part que les composantes C_i de C sont lisses et se coupent transversalement, d'autre part que l'on élimine les obstructions évidentes à l'hyperbolicité du complémentaire de C, les cas où une courbe rationnelle ne rencontre C qu'en deux points. Plus précisément on exclut:

– une tangente à C passant par deux points doubles,

– une bitangente ou une tangente d'inflexion à C passant par un point double,

– une conique ne rencontrant C qu'en deux points.

Le dernier cas n'arrive que si l'une des composantes de C, par exemple C_3, est une droite. La conique coupe C_3 en deux points qui sont aussi sur $C_1 \cup C_2$ et y possède un contact d'ordre au moins 8 avec $C_1 \cup C_2$.

On vérifie que toutes ces situations forment un diviseur dans l'espace des courbes à 3 composantes de degré fixé. C'est donc une généricité au sens de Zariski.

Démonstration du théorème. Elle procède par contradiction et consiste en deux étapes: construire, à partir d'une courbe entière évitant C, une limite qui dégénère algébriquement; puis discuter les courbes algébriques rencontrant peu C pour tomber sur une situation non générique.

La première étape provient de l'utilisation du résultat du paragraphe précédent après avoir projeté $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ dans $(\mathbf{C}^*)^2$ grâce aux trois composantes. On en déduit une limite évitant C qui se projette comme feuille d'un feuilletage linéaire de $(\mathbf{C}^*)^2$. Ceci va forcer la rationalité des pentes de ce feuilletage et donc l'algébricité de la limite.

La deuxième étape, classique, utilise systématiquement le théorème de Bézout et la formule du genre pour des courbes à singularités simples.

a) *Le cadre.* Soit $(P_i = 0)$ l'équation (de degré d_i) de la courbe C_i. Notons $F\colon \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ l'endomorphisme holomorphe de degré $d = \operatorname{ppcm}(d_1, d_2, d_3)$ défini par

$$F(z) = [P_1(z)^{m_1} : P_2(z)^{m_2} : P_3(z)^{m_3}], \text{ avec } m_i d_i = d\,.$$

Par construction, F envoie le complémentaire de C dans $(\mathbf{C}^*)^2$. Son lieu critique consiste en les courbes C_i avec multiplicité $m_i - 1$ et une courbe D de degré $d_1 + d_2 + d_3 - 3$. Remarquons que D évite les points doubles de C du fait de leur transversalité.

Soit maintenant une courbe entière non constante $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ évitant C. Comme $F \circ f$ omet les axes de coordonnées, elle possède une limite exponentielle non constante de la forme $h(z) = [c_1 e^{\alpha_1 z} : c_2 e^{\alpha_z} : c_3 e^{\alpha_3 z}]$ avec α_i réel (cf. §3).

Remarquons qu'une limite de $F \circ f$ se relève toujours via F en une limite de f. En effet, si $F \circ f \circ r_n$ tend vers h, alors $f \circ r_n$ doit être normale. Sinon sa renormalisation donnerait une courbe entière non constante dans une fibre de F. Donc, quitte à extraire, $f \circ r_n$ converge vers g avec $F \circ g = h$.

En particulier, $h(\mathbf{C})$ n'est pas contenue dans l'un des axes de coordonnées. Sinon $g(\mathbf{C})$ serait tracée sur une des composantes de C, par exemple C_1 et éviterait les deux autres. Or, pour des raisons de degré, le cardinal de $C_1 \cap (C_2 \cup C_3)$ est au moins 3. Ceci est impossible car une courbe algébrique privée de 3 points est hyperbolique.

Ainsi, quitte à reparamétrer f et prendre des multiples des équations P_i, on aura $h(z) = (e^z, e^{\alpha z})$ dans une carte de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

b) *Absence de limites transcendantes.* Montrons que les adhérences $\overline{h(\mathbf{C})}$ et $\overline{g(\mathbf{C})}$ sont algébriques. Il suffit pour cela de voir que α est rationnel. Supposons le contraire.

La courbe entière $h(\mathbf{C})$ est alors l'une des feuilles complexes de l'hypersurface réelle Levi-plate H d'équation $(|y| = |x|^\alpha)$ dans $(\mathbf{C}^*)^2$. Les autres feuilles complexes sont clairement des limites de h et donc de $F \circ f$. Ainsi l'adhérence de $g(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ est feuilletée par des limites de g, donc de f, relevant via F les feuilles complexes de H.

La contradiction va venir d'une discussion de la position de $g(\mathbf{C})$ par rapport à D, le lieu critique de la restriction de F au complémentaire de C.

Du fait de notre latitude de choix de $h(\mathbf{C})$ parmi l'infinité de feuilles complexes de H, on peut supposer que $h(\mathbf{C})$ ne coupe $F(D)$ qu'en des valeurs régulières de $F|_D$, de plus transversalement. En effet, les valeurs singulières de $F|_D$ ainsi que les tangences de $F(D)$ aux feuilles complexes de H sont en nombre fini, puisque ces feuilles sont transcendantes et $F(D)$ algébrique.

Alors $g(\mathbf{C})$ doit éviter D : sinon la différentielle $D_p(F)$ en un point d'intersection de $g(\mathbf{C})$ avec D aurait une image contenant les tangentes à $F(D)$ et $h(\mathbf{C})$ en $F(p)$; elle serait de rang maximal.

Il en est de même pour les limites non constantes de g : sinon l'une d'entre elles serait contenue dans $D \setminus C$ qui est hyperbolique.

Ainsi l'adhérence $\overline{g(\mathbf{C})}$ omet D puisqu'elle est feuilletée dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ par des limites de g et que $\overline{F^{-1}(H)}$ ne rencontre C qu'en ses points doubles, soit hors de D. Donc $g(\mathbf{C})$ est contenu dans le complémentaire d'un voisinage de D dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui est hyperbolique (cf. § 1), d'où la contradiction.

c) *Discussion des limites algébriques.* Par ce qui précède, la courbe entière $g(\mathbf{C})$ est contenue dans une composante irréductible Γ de degré δ d'une courbe algébrique d'équation (après permutation des composantes de C) :

$$\text{i)} \quad (P_1^{n_1} = P_2^{n_2}) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{pgcd}(n_1, n_2) = 1$$

ou

$$\text{ii)} \quad (P_1^{n_1} P_2^{n_2} = P_3^{n_3}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{pgcd}(n_1, n_2, n_3) = 1\,.$$

Notons que Γ ne rencontre C qu'en deux points exactement, toujours car une courbe privée de 3 points est hyperbolique. Plus précisément, si Γ est singulière en un de ces points, cette singularité doit être irréductible, comme on le constate en passant à la normalisation.

Montrons qu'aucune de ces possibilités n'est générique :

Cas i) Notons $\Gamma \cap C = \{p, q\}$ avec p dans $C_1 \cap C_2$ et q dans $C_3 \setminus (C_1 \cup C_2)$. D'après l'équation i), Γ a en p une multiplicité d'intersection n_1 avec C_2 et n_2 avec C_1. Comme p est l'unique intersection de Γ avec C_1 et C_2, on en déduit par le théorème de Bézout que δ divise n_1 et n_2. Ainsi $\delta = 1$ et Γ est une droite. Comme cette droite coupe C_i avec multiplicité d_i (en p pour $i = 1, 2$, en q pour $i = 3$) avec $d_1 + d_2 + d_3 \geq 5$, elle doit être une bitangente ou une tangente d'inflexion à C passant par le point double p.

Cas ii) Notons cette fois $\Gamma \cap C = \{p_1, p_2\}$ avec p_i dans $C_i \cap C_3$.

– *Supposons d'abord* Γ *non singulière.* Elle doit être rationnelle car $\Gamma \setminus \{p_1, p_2\}$ n'est pas hyperbolique. C'est donc une droite ou une conique.

Dans le premier cas, Γ est une tangente à C passant par les deux points doubles p_1 et p_2. Sinon elle serait transverse à C en p_1 et p_2 et le théorème de Bézout imposerait $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = 2$ contredisant l'hypothèse sur le degré de C.

Dans le second cas, la conique Γ possède un contact d'ordre $2d_i$ avec C_i en p_i pour $i = 1, 2$ toujours par Bézout. Elle est donc transverse à C_3 en p_1 et p_2. L'intersection totale de Γ avec C_3 vaut 2 et C_3 doit être une droite. Ainsi $d_1 + d_2 \geq 4$ et la conique Γ a un contact d'ordre 8 au moins avec $C_1 \cup C_2$.

– *Analysons le cas singulier.* Près de p_i, la courbe Γ a une équation locale de la forme $(x^{r_i} = y^{s_i})$ avec $\mathrm{pgcd}(r_i, s_i) = 1$ puisque la singularité y est irréductible. Ici $(x = 0)$ est une équation locale de C_i et $(y = 0)$ de C_3.

Comme plus haut, le calcul des multiplicités d'intersection et le théorème de Bézout donnent :

$$\delta = s_1/d_1 = s_2/d_2 = r_1/d_3 + r_2/d_3\,, \tag{1}$$

qui implique

$$(\delta - 1)(\delta - 2) = (r_1/d_3 - 1)(s_1/d_1 - 1) + (r_2/d_3 - 1)(s_2/d_2 - 1)\,. \tag{2}$$

Par ailleurs, la formule du genre pour une courbe irréductible de genre g, de degré δ et possédant un certain nombre de singularités irréductibles de la forme $(x^{r_i} = y^{s_i})$ s'écrit (cf. par exemple [10]) :

$$2g \leq (\delta - 1)(\delta - 2) - \sum (r_i - 1)(s_i - 1)\,,$$

l'inégalité provenant de la présence éventuelle d'autres singularités. Dans notre cas, on en déduit :

$$(\delta - 1)(\delta - 2) \geq (r_1 - 1)(s_1 - 1) + (r_2 - 1)(s_2 - 1)\,. \tag{3}$$

La comparaison de (2) et (3) impose l'égalité terme à terme des seconds membres ; en particulier Γ est non singulière hors de p_1 et p_2. On obtient :

$$(r_1-1)(s_1-1) = (r_1/d_3-1)(s_1/d_1-1)\,, \quad (r_2-1)(s_2-1) = (r_2/d_3-1)(s_2/d_2-1)\,.$$

Comme Γ est singulière, l'une de ces égalités – par exemple la première – est non nulle. Ceci entraîne $d_1 = d_3 = 1$ (C_1 et C_3 sont des droites) et donc $d_2 \geq 3$. On en déduit que la deuxième égalité doit être nulle, soit $r_2 = 1$. D'après (1), on obtient $\delta = s_1 = r_1 + 1$. Autrement dit, la seule singularité de Γ est du type $(x^{\delta-1} = y^{\delta})$ avec $\delta \geq 3$ en p_1.

Ceci va imposer la présence d'une tangente d'inflexion à C_2 en p_2 : en effet, soit $(L = 0)$ l'équation de la tangente à Γ en p_2 et Γ_λ la courbe d'équation $(P_1^{\delta-1}L = \lambda P_3^{\delta})$. On choisit λ de sorte que Γ et Γ_λ coïncident. Il suffit pour cela de fixer λ pour avoir un contact d'ordre au moins $\delta^2 - 1$ en p_1 entre Γ et Γ_λ. Comme, par construction, Γ et Γ_λ sont déjà tangentes en p_2, elles doivent coïncider par Bézout. Ainsi la tangente à Γ en p_2 est une tangente d'inflexion car c'en est une pour Γ_λ puisque $\delta \geq 3$. C'en est une aussi pour C_2 puisque Γ et C_2 y ont un contact important (d'ordre δd_2).

En conclusion, aucun de ces cas de figure n'est générique, ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

REMARQUE. On construit facilement des exemples de courbes C à trois composantes de degré 5 dont le complémentaire n'est pas hyperbolique à cause d'une droite ne coupant C qu'en 2 points. En voici deux, présentés en coordonnées affines, où l'obstruction Γ est une conique ou une cubique rationnelle ne rencontrant C qu'en 2 points.

a) C est l'union des deux paraboles d'équation $(\pm 2x = y^2 - 2)$ et de l'axe des x. Le cercle Γ d'équation $(x^2 + y^2 = 1)$ a des contacts d'ordre 4 avec les paraboles en leurs sommets situés sur l'axe des x.

b) C est l'union de la cubique d'équation $(y^3 = x^3 + x)$, de l'axe des x et de la droite à l'infini. La cubique rationnelle Γ d'équation $(x = y^3)$ a son point de rebroussement à l'infini au point de rencontre des deux droites et un contact d'ordre 9 avec la cubique de C en l'origine, également sur l'axe des x.

5. APPENDICE. COURBES DE BRODY DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

Le théorème du paragraphe 3 est aussi conséquence de la description des courbes de Brody dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Une courbe entière $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est dite *de Brody* si $\|f'\| \leq 1$, la dérivée étant mesurée dans les métriques usuelles de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$.

Toute courbe entière possède une limite de Brody, précisément par le lemme de Brody (cf. § 1). Celles contenues dans $(\mathbf{C}^*)^k$ sont très simples :

THÉORÈME. *Les seules courbes de Brody $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ évitant les hyperplans de coordonnées sont de la forme*

$$f(z) = [ce^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \qquad c_i, \alpha_i \textit{ dans } \mathbf{C}\,.$$

Démonstration. Écrivons $f = e^{\phi}$ dans une carte de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, par exemple $(z_{k+1} = 1)$.

La première étape, classique (voir [5]), montre que les composantes de ϕ sont quadratiques. L'argument remonte aux origines de la théorie de Nevanlinna. La propriété d'être de Brody pour f se traduit directement par la surharmonicité de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2) - |z|^2$. Les moyennes de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2)$ sur les cercles de centre 0 et de rayon r