Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES
Autor: Berteloot, François / Duval, Julien
Kapitel: 2. Le théorème de Green
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65437

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En voici une traduction directe :

OUVERTURE. *Soit X une variété compacte complexe et F un fermé hyperbolique dans X. Alors F possède un voisinage hyperbolique.*

Sinon on créerait, à partir d'une base dénombrable de voisinages non hyperboliques de F, une suite de courbes entières non constantes convergeant, après extraction et reparamétrage, vers une courbe entière non constante contenue dans F.

2. LE THÉORÈME DE GREEN

Voici comment on peut adapter l'argument de Ros pour montrer la généralisation suivante du théorème de Picard (due à Green [8]) :

THÉORÈME. *L'espace projectif $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $2k+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique.*

Ici, « être en position générale » signifie que $k+1$ de ces hyperplans n'ont pas d'intersection commune.

Démonstration. Plongeons $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ en envoyant les hyperplans évités d'équation $\{l_i = 0\}$ dans les hyperplans de coordonnées de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ par

$$\phi = [l_1 : \ldots : l_{2k+1}]$$

d'image notée P. Si A est une partie de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$, on notera A^* le complémentaire dans A des hyperplans de coordonnées. On veut donc montrer l'hyperbolicité de P^*.

Par position générale, P évite un voisinage des points de $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ ayant $k+1$ coordonnées nulles. Autrement dit, P est contenu dans

$$X_\epsilon = \{z,\ \ |z_i| \geq \epsilon \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

où $\|z\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_{2k+1}|\}$ et ϵ est assez petit.

Il suffit donc de voir l'hyperbolicité de X_ϵ^*. Mais la puissance n-ième $(z \mapsto z^n)$ induit un revêtement non ramifié de $X_{\epsilon^{1/n}}^*$ sur X_ϵ^* et $X_{\epsilon^{1/n}}$ converge vers X_1 en distance de Hausdorff.

Comme l'hyperbolicité est une propriété ouverte et stable par revêtement (cf. § 1), tout se réduit à montrer le

LEMME. *Le polyèdre*

$$X_1 = \{z,\ |z_i| = \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

est hyperbolique.

Démonstration. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ une courbe entière contenue dans X_1. Elle doit «passer du temps» dans une de ses faces $X_I = \{z,\ |z_i| = \|z\|,\ i \in I\}$ où I est une partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$. Par exemple, on peut supposer $f^{-1}(X_{\{1,\ldots,k+1\}})$ d'intérieur non vide. Autrement dit, si $f = [f_1 : \ldots : f_{2k+1}]$, on aura par prolongement analytique $|f_1| \equiv \cdots \equiv |f_{k+1}|$ sur tout $\mathbf{C}$. Comme l'image de f est contenue dans X_1 et que toute partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$ rencontre $\{1, \ldots, k+1\}$, il s'ensuit que $\|f\| \equiv |f_1|$ sur tout $\mathbf{C}$. Donc, pour tout i, $|f_i|/|f_1|$ est bornée par 1 sur $\mathbf{C}$ et f est constante par le théorème de Liouville. $\square$

REMARQUE. La même démonstration s'applique au résultat de Babets [1] sur l'hyperbolicité de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $2k+1$ hypersurfaces en position générale.

3. LINÉARISATION DES COURBES ENTIÈRES DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

On décrit dans ce paragraphe les limites les plus simples des courbes entières dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $k+1$ hyperplans en position générale, donc dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante. Une *limite* de f est une courbe entière non constante g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ obtenue comme limite (uniforme sur les compacts de $\mathbf{C}$) de $(f \circ r_n)$ où (r_n) est une suite de reparamétrages à la source.

Les propriétés suivantes se vérifient facilement:

a) une limite d'une limite g de f en est encore une pour f;

b) si une courbe entière évite une hypersurface dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, ses limites évitent encore cette hypersurface ou y sont contenues.