

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 47 (2001)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES  
**Autor:** Berteloot, François / Duval, Julien  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-65437>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES

par François BERTELOOT et Julien DUVAL

RÉSUMÉ. Nous donnons, dans l'esprit de l'argument de Ros pour le théorème de Picard, une preuve nouvelle et directe de l'hyperbolicité de deux complémentaires d'hypersurfaces de l'espace projectif : celui de  $2k + 1$  hyperplans en position générale dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , ainsi que celui d'une courbe à 3 composantes, générique, de degré au moins 5 dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

### 0. INTRODUCTION

Une partie de l'espace projectif  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière non constante, i.e. d'image holomorphe non constante de  $\mathbf{C}$ .

L'objet de cet article est de donner une nouvelle démonstration, élémentaire, de l'hyperbolicité de deux exemples classiques de complémentaires d'hypersurfaces projectives :

- dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , le complémentaire de  $2k + 1$  hyperplans en position générale (Green [8]);
- dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ , le complémentaire d'une courbe à trois composantes, générique, de degré  $\geq 5$  (Grauert [7] pour trois coniques, Dethloff-Schumacher-Wong [5], [6] si aucune des trois composantes n'est une droite).

Ces exemples s'inscrivent dans le cadre de la conjecture de Kobayashi (voir [5] par exemple) pour les complémentaires :

CONJECTURE. *Une hypersurface à  $p$  composantes, générique, de degré  $\geq 2k + 1$  de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  a un complémentaire hyperbolique.*

Notons au passage les progrès récents (voir [11] et [4]) dans le cas bien plus difficile que ceux traités ici du complémentaire d'une courbe irréductible dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

Les démonstrations connues de l'hyperbolicité des deux exemples qui nous intéressent reposent sur des techniques de distribution des valeurs (lemme de Borel [2]) ou de métriques de jets à courbure négative (voir [9] comme référence générale).

La démarche directe proposée ici s'inspire de la démonstration de Ros du théorème de Picard. L'ingrédient principal en est le lemme de Zalcman-Brody [12], [3] qui permet d'extraire d'une suite de courbes entières non constantes une sous-suite qui converge après reparamétrage vers une courbe entière non constante.

Voici l'argument de Ros tel qu'il est exposé par Zalcman dans [13]:

Soit  $f$  holomorphe non constante de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  évitant 0, 1 et  $\infty$ . Ses racines  $n$ -ièmes  $f^{1/n}$  évitent de plus en plus de points sur le cercle unité. Quitte à reparamétriser, elles convergent après extraction vers une fonction entière non constante qui évite maintenant tout le cercle unité. Elle est à valeurs dans le disque unité ou son complémentaire, ce qui contredit le théorème de Liouville.  $\square$

Cette démonstration s'adapte bien au résultat de Green. La seule modification consiste à faire jouer le même rôle aux hyperplans omis grâce à un plongement adéquat de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ . L'énoncé se réduit par le même usage de racines  $n$ -ièmes et passage à la limite à l'hyperbolicité d'un certain polyèdre dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ . Celle-ci résulte alors du théorème de Liouville.

La démonstration de Ros peut aussi s'interpréter comme une « linéarisation » des courbes entières de  $\mathbf{C}^*$  :

Soit  $f$  holomorphe non constante de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^*$ . Alors il existe une suite de reparamétrages à la source  $(r_n)$  telle que  $f \circ r_n$  converge vers  $e^z$ .

En effet, on trouve par le lemme de Zalcman-Brody des reparamétrages  $s_n$  tels que  $f^{1/n} \circ s_n$  converge après extraction vers  $\phi$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^*$ . L'image de  $\phi$  doit rencontrer le cercle unité en une valeur non complètement critique donc, quitte à reparamétriser, on a :

$$\phi(z) = e^{i\theta}(1 + z + O(z^2)).$$

Ainsi  $f \circ s_n(z/n)$  équivaut à  $e^{in\theta}(1 + z/n)^n$  qui tend vers  $e^z$  après extraction.  $\square$

Cet énoncé de linéarisation se généralise bien aux courbes entières de  $(\mathbb{C}^*)^k$ . En particulier, toute courbe entière non constante dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  possède une limite (au sens de limite d'une suite de courbes construites en reparamétrisant la courbe initiale) qui est feuille d'un feuilletage linéaire de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Le cas du complémentaire d'une courbe  $C$  à trois composantes en découle de la manière suivante: notons d'abord que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$  est un revêtement ramifié de  $(\mathbb{C}^*)^2$  du fait des trois composantes de  $C$ . L'idée est maintenant de remplacer une courbe entière non constante dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$  par une de ses limites feuille d'un feuilletage holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Ce feuilletage s'obtient par ce qui précède comme l'image réciproque par le revêtement ramifié d'un feuilletage linéaire de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On montre ensuite que cette feuille limite doit être algébrique en analysant l'intersection d'une feuille transcendante du feuilletage avec le lieu de ramification du revêtement. Elle est donc tracée sur une courbe rationnelle ne coupant  $C$  qu'en deux points. C'est une situation non générique.  $\square$

Voici le plan de ce texte: après des préliminaires sur l'hyperbolicité, le second paragraphe traite du théorème de Green tandis que la linéarisation des courbes entières de  $(\mathbb{C}^*)^k$  fait l'objet du troisième. Le quatrième paragraphe est consacré au complémentaire des courbes à trois composantes dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Enfin un appendice explicite les courbes de Brody dans  $(\mathbb{C}^*)^k$ , apportant un autre éclairage sur l'énoncé de linéarisation.

## 1. PRÉLIMINAIRES

Notre référence générale pour l'hyperbolicité est la monographie [9].

**DÉFINITION.** Soit  $X$  une variété complexe. Une partie  $A$  de  $X$  est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière non constante: il n'existe pas d'application holomorphe non constante de  $\mathbb{C}$  dans  $X$  d'image contenue dans  $A$ .

Les premiers exemples proviennent du théorème de Liouville:

**EXEMPLE.** Le complémentaire d'un voisinage d'une hypersurface projective de  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$  est hyperbolique.



En effet un plongement de Veronese envoie ce complémentaire dans un borné de  $\mathbf{C}^N$ . Ainsi l'adhérence de toute courbe entière non constante de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  coupe toute hypersurface projective.

On produit d'autres exemples par la propriété suivante qui résulte du relèvement des homotopies pour un revêtement :

**INVARIANCE PAR REVÊTEMENT.** *Soient  $X$  une variété complexe et  $Y$  un revêtement non ramifié de  $X$ . Alors  $X$  est hyperbolique si et seulement si  $Y$  l'est.*

On obtient ainsi l'hyperbolicité des surfaces de Riemann hyperboliques au sens traditionnel, i.e. celles dont le revêtement universel est le disque unité  $D$ .

L'outil de base de ce qui va suivre est le lemme de reparamétrisation suivant, dû à Zalcman [12] pour  $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  et à Brody [3] en général (voir aussi [9], chap. 3).

**LEMME.** *Soient  $X$  une variété compacte complexe (munie d'une métrique hermitienne) et  $(f_n)$  une suite d'applications holomorphes du disque unité dans  $X$ . On suppose que  $\|f'_n(0)\|$  tend vers l'infini. Alors il existe une suite de reparamétrages  $(r_n)$  de  $\mathbf{C}$  convergeant vers 0 pour laquelle  $f_n \circ r_n$  tend (uniformément sur les compacts) vers une application entière non constante  $\phi$  de  $\mathbf{C}$  dans  $X$  après extraction d'une sous-suite.*

*De plus  $\phi$  est à dérivée bornée.*

**REMARQUE.** Dans le contexte, ce lemme fait habituellement le lien entre hyperbolicité et hyperbolicité au sens de Kobayashi, i.e. la non dégénérescence de la pseudométrie donnée par

$$K(x, v) = \inf\{1/r, r > 0 \mid \exists f: D \rightarrow \mathbf{C} \text{ holomorphe avec } f(0)=x, f'(0)=rv\},$$

où  $x$  est un point de  $X$  et  $v$  un vecteur tangent. Les complémentaires dans ce texte seront ainsi hyperboliques complets et plongés hyperboliquement au sens de Kobayashi (cf. [9]).

**CONSÉQUENCE.** *Soient  $X$  une variété compacte complexe et  $f_n: \mathbf{C} \rightarrow X$  une suite de courbes entières non constantes. Il existe une suite de reparamétrages  $(r_n)$  à la source telle que  $f_n \circ r_n$  converge vers une courbe entière non constante après extraction.*

En voici une traduction directe :

**OUVERTURE.** *Soit  $X$  une variété compacte complexe et  $F$  un fermé hyperbolique dans  $X$ . Alors  $F$  possède un voisinage hyperbolique.*

Sinon on créerait, à partir d'une base dénombrable de voisinages non hyperboliques de  $F$ , une suite de courbes entières non constantes convergeant, après extraction et reparamétrage, vers une courbe entière non constante contenue dans  $F$ .

## 2. LE THÉORÈME DE GREEN

Voici comment on peut adapter l'argument de Ros pour montrer la généralisation suivante du théorème de Picard (due à Green [8]) :

**THÉORÈME.** *L'espace projectif  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $2k + 1$  hyperplans en position générale est hyperbolique.*

Ici, « être en position générale » signifie que  $k + 1$  de ces hyperplans n'ont pas d'intersection commune.

*Démonstration.* Plongeons  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  en envoyant les hyperplans évités d'équation  $\{l_i = 0\}$  dans les hyperplans de coordonnées de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  par

$$\phi = [l_1 : \dots : l_{2k+1}]$$

d'image notée  $P$ . Si  $A$  est une partie de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ , on notera  $A^*$  le complémentaire dans  $A$  des hyperplans de coordonnées. On veut donc montrer l'hyperbolicité de  $P^*$ .

Par position générale,  $P$  évite un voisinage des points de  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  ayant  $k + 1$  coordonnées nulles. Autrement dit,  $P$  est contenu dans

$$X_\epsilon = \{z, |z_i| \geq \epsilon \|z\| \text{ pour au moins } k + 1 \text{ coordonnées}\}$$

où  $\|z\| = \max \{|z_1|, \dots, |z_{2k+1}|\}$  et  $\epsilon$  est assez petit.

Il suffit donc de voir l'hyperbolicité de  $X_\epsilon^*$ . Mais la puissance  $n$ -ième ( $z \mapsto z^n$ ) induit un revêtement non ramifié de  $X_{\epsilon^{1/n}}^*$  sur  $X_\epsilon^*$  et  $X_{\epsilon^{1/n}}$  converge vers  $X_1$  en distance de Hausdorff.

Comme l'hyperbolicité est une propriété ouverte et stable par revêtement (cf. § 1), tout se réduit à montrer le

LEMME. *Le polyèdre*

$$X_1 = \{z, |z_i| = \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

*est hyperbolique.*

*Démonstration.* Soit  $f$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$  une courbe entière contenue dans  $X_1$ . Elle doit «passer du temps» dans une de ses faces  $X_I = \{z, |z_i| = \|z\|, i \in I\}$  où  $I$  est une partie de  $\{1, \dots, 2k+1\}$  de cardinal  $k+1$ . Par exemple, on peut supposer  $f^{-1}(X_{\{1, \dots, k+1\}})$  d'intérieur non vide. Autrement dit, si  $f = [f_1 : \dots : f_{2k+1}]$ , on aura par prolongement analytique  $|f_1| \equiv \dots \equiv |f_{k+1}|$  sur tout  $\mathbf{C}$ . Comme l'image de  $f$  est contenue dans  $X_1$  et que toute partie de  $\{1, \dots, 2k+1\}$  de cardinal  $k+1$  rencontre  $\{1, \dots, k+1\}$ , il s'ensuit que  $\|f\| \equiv |f_1|$  sur tout  $\mathbf{C}$ . Donc, pour tout  $i$ ,  $|f_i|/|f_1|$  est bornée par 1 sur  $\mathbf{C}$  et  $f$  est constante par le théorème de Liouville.  $\square$

REMARQUE. La même démonstration s'applique au résultat de Babets [1] sur l'hyperbolicité de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $2k+1$  hypersurfaces en position générale.

### 3. LINÉARISATION DES COURBES ENTIÈRES DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

On décrit dans ce paragraphe les limites les plus simples des courbes entières dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  privé de  $k+1$  hyperplans en position générale, donc dans  $(\mathbf{C}^*)^k$ .

DÉFINITION. Soit  $f$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  une courbe entière non constante. Une *limite* de  $f$  est une courbe entière non constante  $g$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  obtenue comme limite (uniforme sur les compacts de  $\mathbf{C}$ ) de  $(f \circ r_n)$  où  $(r_n)$  est une suite de reparamétrages à la source.

Les propriétés suivantes se vérifient facilement :

- a) une limite d'une limite  $g$  de  $f$  en est encore une pour  $f$  ;
- b) si une courbe entière évite une hypersurface dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , ses limites évitent encore cette hypersurface ou y sont contenues.

**THÉORÈME.** Soit  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  une courbe entière non constante évitant  $k+1$  hyperplans en position générale qu'on choisit comme les hyperplans de coordonnées. Alors  $f$  possède une limite exponentielle non constante de la forme :

$$g(z) = [c e^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \dots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \quad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}.$$

*Démonstration.* En voici le schéma : comme plus haut on extrait les racines  $n$ -ièmes  $f^{1/n}$  de  $f$  que l'on reparamètre de sorte que  $f^{1/n} \circ r_n$  converge vers  $\phi$  entière non constante. L'idée est maintenant d'exploiter le fait que  $(f \circ r_n)$  ne peut être normale car proche de  $(\phi^n)$ . On la renormalise près d'une intersection entre l'image de  $\phi$  et le lieu de non-normalité des puissances  $n$ -ièmes pour créer la limite exponentielle voulue.

Plus précisément, notons  $Y$  ce lieu où la famille  $(z \mapsto z^n)$  n'est pas normale. C'est un polyèdre constitué des faces

$$Y_{ij} = \{z, |z_i| = |z_j| \geq |z_l|, \text{ pour tout } l\}.$$

Son complémentaire consiste en  $k+1$  polydisques ouverts

$$U_i = \{z, |z_i| > |z_l|, l \neq i\}.$$

Pour simplifier la discussion, supposons les composantes de  $\phi$  distinctes en module. Remarquons que la courbe entière  $\phi(\mathbf{C})$  rencontre  $Y$  ; en fait, la préimage  $\phi^{-1}(Y)$  sépare  $\mathbf{C}$ , sinon la courbe serait entièrement contenue dans un des polydisques fermés  $\bar{U}_i$  qui sont hyperboliques.

Comme  $|\phi_i| \neq |\phi_j|$ , on doit avoir  $(\phi_i/\phi_j)' \neq 0$  sur  $\phi^{-1}(Y_{ij})$  hors de points isolés. Autrement dit, la courbe  $\phi(\mathbf{C})$  est transverse à toutes les faces de  $Y$  en une intersection générique.

On se place au voisinage  $\Delta$  d'un tel point générique dans  $\phi^{-1}(Y)$ , par exemple 0 après translation. Son image  $\phi(\Delta)$  est transverse à  $Y$ . Il en est de même avant la limite pour  $f_n(\Delta)$  où  $f_n = f^{1/n} \circ r_n$ . On peut donc supposer après translation que  $f_n(0)$  est dans  $Y$ , par exemple dans le bord du polydisque unité  $U = U_{k+1}$  de la carte  $(z_{k+1} = 1)$ , et que sa puissance  $n$ -ième converge vers  $c$ , quitte à extraire.

Relevons  $\phi$  et  $f_n$  dans cette carte via l'exponentielle en posant  $\phi = e^\psi$  et  $f_n = e^{\psi_n}$  où  $\psi_n$  converge vers  $\psi$ . Ainsi  $\psi'_n$  converge vers  $\psi'$ , puis  $n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))$  vers  $\alpha z$  localement uniformément, où  $\alpha = \psi'(0)$ .

Donc  $f \circ r_n(z/n) = (f_n)^n(0) e^{n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))}$  tend vers la limite voulue  $g(z) = c e^{\alpha z}$ . Celle-ci n'est pas constante : en effet  $\phi(0)$  est dans l'une des faces du bord de  $U$  par exemple  $Y_{1k+1}$ . La transversalité de la courbe  $\phi(\mathbf{C})$  à cette face se traduit par  $\phi'_1(0) \neq 0$  d'où  $\alpha_1 \neq 0$ .

Le cas général se discute de manière analogue en groupant les composantes de  $\phi$  identiques en module. Ainsi on ne retiendra par exemple de  $Y$  que les faces  $Y_{ij}$  pour  $|\phi_i| \not\equiv |\phi_j|$ .  $\square$

#### REMARQUES.

1) On peut supposer de plus  $\alpha$  réel dans la limite exponentielle  $g$ . Si ce n'est pas le cas, voici comment construire une limite de  $g$  (et donc de  $f$ ) satisfaisant cette propriété: considérons l'enveloppe convexe des  $\alpha_i$  significatifs (ceux correspondant à des coefficients  $c_i \neq 0$ ) dans l'écriture de  $g$ ; quitte à reparamétriser  $g$ , on suppose cette enveloppe contenue dans le demi-plan supérieur avec une arête réelle: par exemple  $\alpha_i$  réel pour  $i \leq p$  et  $\text{Im}(\alpha_i) > 0$  pour  $i > p$ ; de  $g(z + in) = [e^{i\alpha n} c e^{\alpha z}]$  on extrait une sous-suite convergeant vers  $h(z) = [c_1 e^{\alpha_1 z} : \dots : c_p e^{\alpha_p z} : 0 : \dots : 0]$  qui convient.

2) Ce théorème contient celui de Green: en effet, soit  $f(\mathbf{C})$  une courbe entière non constante dans  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  omettant  $2k + 1$  hyperplans en position générale, d'équations  $(l_i = 0)$ . En considérant  $\Phi = [l_1 : \dots : l_{2k+1}]$  le plongement correspondant dans  $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ , la courbe entière  $\Phi \circ f$  évite maintenant les hyperplans de coordonnées. Elle possède une limite de la forme suivante, quitte à permuter et prendre des multiples des formes linéaires  $l_i$ :

$$g(z) = [e^{\alpha_1 z} : \dots : e^{\alpha_p z} : 0 : \dots : 0] \text{ avec } \alpha_i = \alpha_1 \text{ ssi } i \leq p.$$

Par position générale, chacune des formes linéaires  $l_i$  est toujours combinaison de  $k + 1$  autres; il en est donc de même pour les composantes de  $\Phi$ . Ceci entraîne que  $p \leq k$ : sinon toute composante de  $g$  serait proportionnelle à  $e^{\alpha_1 z}$  et  $g$  serait constante. Mais, d'un autre côté, la première composante de  $g$  doit être combinaison des  $k + 1$  dernières, soit:

$$e^{\alpha_1 z} = \sum_{i \geq k+1} \lambda_i e^{\alpha_i z}.$$

Or on a dans cette égalité  $\alpha_i \neq \alpha_1$  puisque  $p \leq k$ . C'est impossible.

#### 4. COMPLÉMENTAIRE D'UNE COURBE À TROIS COMPOSANTES DANS $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Nous appliquons ce qui précède à l'étude de l'hyperbolicité du complémentaire de trois courbes dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  (comparer avec [5], [6]).

**THÉORÈME.** *Le plan projectif privé d'une courbe  $C$  à 3 composantes, générique, de degré au moins 5, est hyperbolique.*

Ici la généricité signifie d'une part que les composantes  $C_i$  de  $C$  sont lisses et se coupent transversalement, d'autre part que l'on élimine les obstructions évidentes à l'hyperbolicité du complémentaire de  $C$ , les cas où une courbe rationnelle ne rencontre  $C$  qu'en deux points. Plus précisément on exclut :

- une tangente à  $C$  passant par deux points doubles,
- une bitangente ou une tangente d'inflexion à  $C$  passant par un point double,
- une conique ne rencontrant  $C$  qu'en deux points.

Le dernier cas n'arrive que si l'une des composantes de  $C$ , par exemple  $C_3$ , est une droite. La conique coupe  $C_3$  en deux points qui sont aussi sur  $C_1 \cup C_2$  et y possède un contact d'ordre au moins 8 avec  $C_1 \cup C_2$ .

On vérifie que toutes ces situations forment un diviseur dans l'espace des courbes à 3 composantes de degré fixé. C'est donc une généricité au sens de Zariski.

*Démonstration du théorème.* Elle procède par contradiction et consiste en deux étapes : construire, à partir d'une courbe entière évitant  $C$ , une limite qui dégénère algébriquement ; puis discuter les courbes algébriques rencontrant peu  $C$  pour tomber sur une situation non générique.

La première étape provient de l'utilisation du résultat du paragraphe précédent après avoir projeté  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$  dans  $(\mathbf{C}^*)^2$  grâce aux trois composantes. On en déduit une limite évitant  $C$  qui se projette comme feuille d'un feuilletage linéaire de  $(\mathbf{C}^*)^2$ . Ceci va forcer la rationalité des pentes de ce feuilletage et donc l'algébricité de la limite.

La deuxième étape, classique, utilise systématiquement le théorème de Bézout et la formule du genre pour des courbes à singularités simples.

a) *Le cadre.* Soit  $(P_i = 0)$  l'équation (de degré  $d_i$ ) de la courbe  $C_i$ . Notons  $F: \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  l'endomorphisme holomorphe de degré  $d = \text{ppcm}(d_1, d_2, d_3)$  défini par

$$F(z) = [P_1(z)^{m_1} : P_2(z)^{m_2} : P_3(z)^{m_3}], \text{ avec } m_i d_i = d.$$

Par construction,  $F$  envoie le complémentaire de  $C$  dans  $(\mathbf{C}^*)^2$ . Son lieu critique consiste en les courbes  $C_i$  avec multiplicité  $m_i - 1$  et une courbe  $D$  de degré  $d_1 + d_2 + d_3 - 3$ . Remarquons que  $D$  évite les points doubles de  $C$  du fait de leur transversalité.

Soit maintenant une courbe entière non constante  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  évitant  $C$ . Comme  $F \circ f$  omet les axes de coordonnées, elle possède une limite exponentielle non constante de la forme  $h(z) = [c_1 e^{\alpha_1 z} : c_2 e^{\alpha_2 z} : c_3 e^{\alpha_3 z}]$  avec  $\alpha_i$  réel (cf. §3).

Remarquons qu'une limite de  $F \circ f$  se relève toujours via  $F$  en une limite de  $f$ . En effet, si  $F \circ f \circ r_n$  tend vers  $h$ , alors  $f \circ r_n$  doit être normale. Sinon sa renormalisation donnerait une courbe entière non constante dans une fibre de  $F$ . Donc, quitte à extraire,  $f \circ r_n$  converge vers  $g$  avec  $F \circ g = h$ .

En particulier,  $h(\mathbf{C})$  n'est pas contenue dans l'un des axes de coordonnées. Sinon  $g(\mathbf{C})$  serait tracée sur une des composantes de  $C$ , par exemple  $C_1$  et éviterait les deux autres. Or, pour des raisons de degré, le cardinal de  $C_1 \cap (C_2 \cup C_3)$  est au moins 3. Ceci est impossible car une courbe algébrique privée de 3 points est hyperbolique.

Ainsi, quitte à reparamétriser  $f$  et prendre des multiples des équations  $P_i$ , on aura  $h(z) = (e^z, e^{\alpha z})$  dans une carte de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

b) *Absence de limites transcendantes.* Montrons que les adhérences  $\overline{h(\mathbf{C})}$  et  $\overline{g(\mathbf{C})}$  sont algébriques. Il suffit pour cela de voir que  $\alpha$  est rationnel. Supposons le contraire.

La courbe entière  $h(\mathbf{C})$  est alors l'une des feuilles complexes de l'hypersurface réelle Levi-plate  $H$  d'équation  $(|y| = |x|^\alpha)$  dans  $(\mathbf{C}^*)^2$ . Les autres feuilles complexes sont clairement des limites de  $h$  et donc de  $F \circ f$ . Ainsi l'adhérence de  $g(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$  est feuilletée par des limites de  $g$ , donc de  $f$ , relevant via  $F$  les feuilles complexes de  $H$ .

La contradiction va venir d'une discussion de la position de  $g(\mathbf{C})$  par rapport à  $D$ , le lieu critique de la restriction de  $F$  au complémentaire de  $C$ .

Du fait de notre latitude de choix de  $h(\mathbf{C})$  parmi l'infinité de feuilles complexes de  $H$ , on peut supposer que  $h(\mathbf{C})$  ne coupe  $F(D)$  qu'en des valeurs régulières de  $F|_D$ , de plus transversalement. En effet, les valeurs singulières de  $F|_D$  ainsi que les tangences de  $F(D)$  aux feuilles complexes de  $H$  sont en nombre fini, puisque ces feuilles sont transcendentes et  $F(D)$  algébrique.

Alors  $g(\mathbf{C})$  doit éviter  $D$ : sinon la différentielle  $D_p(F)$  en un point d'intersection de  $g(\mathbf{C})$  avec  $D$  aurait une image contenant les tangentes à  $F(D)$  et  $h(\mathbf{C})$  en  $F(p)$ ; elle serait de rang maximal.

Il en est de même pour les limites non constantes de  $g$ : sinon l'une d'entre elles serait contenue dans  $D \setminus C$  qui est hyperbolique.

Ainsi l'adhérence  $\overline{g(\mathbf{C})}$  omet  $D$  puisqu'elle est feuilletée dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$  par des limites de  $g$  et que  $\overline{F^{-1}(H)}$  ne rencontre  $C$  qu'en ses points doubles,



soit hors de  $D$ . Donc  $g(C)$  est contenu dans le complémentaire d'un voisinage de  $D$  dans  $P^2(C)$  qui est hyperbolique (cf. § 1), d'où la contradiction.

c) *Discussion des limites algébriques.* Par ce qui précède, la courbe entière  $g(C)$  est contenue dans une composante irréductible  $\Gamma$  de degré  $\delta$  d'une courbe algébrique d'équation (après permutation des composantes de  $C$ ):

$$i) \quad (P_1^{n_1} = P_2^{n_2}) \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(n_1, n_2) = 1$$

ou

$$ii) \quad (P_1^{n_1} P_2^{n_2} = P_3^{n_3}) \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(n_1, n_2, n_3) = 1.$$

Notons que  $\Gamma$  ne rencontre  $C$  qu'en deux points exactement, toujours car une courbe privée de 3 points est hyperbolique. Plus précisément, si  $\Gamma$  est singulière en un de ces points, cette singularité doit être irréductible, comme on le constate en passant à la normalisation.

Montrons qu'aucune de ces possibilités n'est générique :

CAS i) Notons  $\Gamma \cap C = \{p, q\}$  avec  $p$  dans  $C_1 \cap C_2$  et  $q$  dans  $C_3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ . D'après l'équation i),  $\Gamma$  a en  $p$  une multiplicité d'intersection  $n_1$  avec  $C_2$  et  $n_2$  avec  $C_1$ . Comme  $p$  est l'unique intersection de  $\Gamma$  avec  $C_1$  et  $C_2$ , on en déduit par le théorème de Bézout que  $\delta$  divise  $n_1$  et  $n_2$ . Ainsi  $\delta = 1$  et  $\Gamma$  est une droite. Comme cette droite coupe  $C_i$  avec multiplicité  $d_i$  (en  $p$  pour  $i = 1, 2$ , en  $q$  pour  $i = 3$ ) avec  $d_1 + d_2 + d_3 \geq 5$ , elle doit être une bitangente ou une tangente d'inflexion à  $C$  passant par le point double  $p$ .

CAS ii) Notons cette fois  $\Gamma \cap C = \{p_1, p_2\}$  avec  $p_i$  dans  $C_i \cap C_3$ .

– *Supposons d'abord  $\Gamma$  non singulière.* Elle doit être rationnelle car  $\Gamma \setminus \{p_1, p_2\}$  n'est pas hyperbolique. C'est donc une droite ou une conique.

Dans le premier cas,  $\Gamma$  est une tangente à  $C$  passant par les deux points doubles  $p_1$  et  $p_2$ . Sinon elle serait transverse à  $C$  en  $p_1$  et  $p_2$  et le théorème de Bézout imposerait  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$  contredisant l'hypothèse sur le degré de  $C$ .

Dans le second cas, la conique  $\Gamma$  possède un contact d'ordre  $2d_i$  avec  $C_i$  en  $p_i$  pour  $i = 1, 2$  toujours par Bézout. Elle est donc transverse à  $C_3$  en  $p_1$  et  $p_2$ . L'intersection totale de  $\Gamma$  avec  $C_3$  vaut 2 et  $C_3$  doit être une droite. Ainsi  $d_1 + d_2 \geq 4$  et la conique  $\Gamma$  a un contact d'ordre 8 au moins avec  $C_1 \cup C_2$ .



– *Analysons le cas singulier.* Près de  $p_i$ , la courbe  $\Gamma$  a une équation locale de la forme  $(x^{r_i} = y^{s_i})$  avec  $\text{pgcd}(r_i, s_i) = 1$  puisque la singularité  $y$  est irréductible. Ici  $(x = 0)$  est une équation locale de  $C_i$  et  $(y = 0)$  de  $C_3$ .

Comme plus haut, le calcul des multiplicités d'intersection et le théorème de Bézout donnent :

$$(1) \quad \delta = s_1/d_1 = s_2/d_2 = r_1/d_3 + r_2/d_3,$$

qui implique

$$(2) \quad (\delta - 1)(\delta - 2) = (r_1/d_3 - 1)(s_1/d_1 - 1) + (r_2/d_3 - 1)(s_2/d_2 - 1).$$

Par ailleurs, la formule du genre pour une courbe irréductible de genre  $g$ , de degré  $\delta$  et possédant un certain nombre de singularités irréductibles de la forme  $(x^{r_i} = y^{s_i})$  s'écrit (cf. par exemple [10]) :

$$2g \leq (\delta - 1)(\delta - 2) - \sum (r_i - 1)(s_i - 1),$$

l'inégalité provenant de la présence éventuelle d'autres singularités. Dans notre cas, on en déduit :

$$(3) \quad (\delta - 1)(\delta - 2) \geq (r_1 - 1)(s_1 - 1) + (r_2 - 1)(s_2 - 1).$$

La comparaison de (2) et (3) impose l'égalité terme à terme des seconds membres ; en particulier  $\Gamma$  est non singulière hors de  $p_1$  et  $p_2$ . On obtient :

$$(r_1 - 1)(s_1 - 1) = (r_1/d_3 - 1)(s_1/d_1 - 1), \quad (r_2 - 1)(s_2 - 1) = (r_2/d_3 - 1)(s_2/d_2 - 1).$$

Comme  $\Gamma$  est singulière, l'une de ces égalités – par exemple la première – est non nulle. Ceci entraîne  $d_1 = d_3 = 1$  ( $C_1$  et  $C_3$  sont des droites) et donc  $d_2 \geq 3$ . On en déduit que la deuxième égalité doit être nulle, soit  $r_2 = 1$ . D'après (1), on obtient  $\delta = s_1 = r_1 + 1$ . Autrement dit, la seule singularité de  $\Gamma$  est du type  $(x^{\delta-1} = y^\delta)$  avec  $\delta \geq 3$  en  $p_1$ .

Ceci va imposer la présence d'une tangente d'inflexion à  $C_2$  en  $p_2$  : en effet, soit  $(L = 0)$  l'équation de la tangente à  $\Gamma$  en  $p_2$  et  $\Gamma_\lambda$  la courbe d'équation  $(P_1^{\delta-1}L = \lambda P_3^\delta)$ . On choisit  $\lambda$  de sorte que  $\Gamma$  et  $\Gamma_\lambda$  coïncident. Il suffit pour cela de fixer  $\lambda$  pour avoir un contact d'ordre au moins  $\delta^2 - 1$  en  $p_1$  entre  $\Gamma$  et  $\Gamma_\lambda$ . Comme, par construction,  $\Gamma$  et  $\Gamma_\lambda$  sont déjà tangentes en  $p_2$ , elles doivent coïncider par Bézout. Ainsi la tangente à  $\Gamma$  en  $p_2$  est une tangente d'inflexion car c'en est une pour  $\Gamma_\lambda$  puisque  $\delta \geq 3$ . C'en est une aussi pour  $C_2$  puisque  $\Gamma$  et  $C_2$  y ont un contact important (d'ordre  $\delta d_2$ ).

En conclusion, aucun de ces cas de figure n'est générique, ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

REMARQUE. On construit facilement des exemples de courbes  $C$  à trois composantes de degré 5 dont le complémentaire n'est pas hyperbolique à cause d'une droite ne coupant  $C$  qu'en 2 points. En voici deux, présentés en coordonnées affines, où l'obstruction  $\Gamma$  est une conique ou une cubique rationnelle ne rencontrant  $C$  qu'en 2 points.

a)  $C$  est l'union des deux paraboles d'équation  $(\pm 2x = y^2 - 2)$  et de l'axe des  $x$ . Le cercle  $\Gamma$  d'équation  $(x^2 + y^2 = 1)$  a des contacts d'ordre 4 avec les paraboles en leurs sommets situés sur l'axe des  $x$ .

b)  $C$  est l'union de la cubique d'équation  $(y^3 = x^3 + x)$ , de l'axe des  $x$  et de la droite à l'infini. La cubique rationnelle  $\Gamma$  d'équation  $(x = y^3)$  a son point de rebroussement à l'infini au point de rencontre des deux droites et un contact d'ordre 9 avec la cubique de  $C$  en l'origine, également sur l'axe des  $x$ .

## 5. APPENDICE. COURBES DE BRODY DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

Le théorème du paragraphe 3 est aussi conséquence de la description des courbes de Brody dans  $(\mathbf{C}^*)^k$ .

DÉFINITION. Une courbe entière  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  est dite *de Brody* si  $\|f'\| \leq 1$ , la dérivée étant mesurée dans les métriques usuelles de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ .

Toute courbe entière possède une limite de Brody, précisément par le lemme de Brody (cf. § 1). Celles contenues dans  $(\mathbf{C}^*)^k$  sont très simples :

THÉORÈME. *Les seules courbes de Brody  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$  évitant les hyperplans de coordonnées sont de la forme*

$$f(z) = [ce^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \dots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \quad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}.$$

*Démonstration.* Écrivons  $f = e^\phi$  dans une carte de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ , par exemple  $(z_{k+1} = 1)$ .

La première étape, classique (voir [5]), montre que les composantes de  $\phi$  sont quadratiques. L'argument remonte aux origines de la théorie de Nevanlinna. La propriété d'être de Brody pour  $f$  se traduit directement par la surharmonicité de  $\text{Log}(1 + |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2) - |z|^2$ . Les moyennes de  $\text{Log}(1 + |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2)$  sur les cercles de centre 0 et de rayon  $r$

croissent ainsi au plus quadratiquement en  $r$ . Il en est de même pour celles de  $\text{Log}(1 + |f_j|^2)$ , donc de  $\text{Log}(|f_j| + |f_j|^{-1})$  puisque  $\text{Log} |f_j| = \text{Re}(\phi_j)$  est harmonique. Or le développement en série entière de  $\phi_j$  donne :

$$\pi r^n \phi_j^{(n)}(0) = n! \int_0^{2\pi} \text{Re} \phi_j(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

d'où

$$\pi r^n |\phi_j^{(n)}(0)| \leq n! \int_0^{2\pi} |\text{Log} |f_j(re^{i\theta})|| d\theta \leq n! \int_0^{2\pi} (\text{Log}(|f_j| + |f_j|^{-1}))(re^{i\theta}) d\theta.$$

En faisant croître indéfiniment  $r$ , on en déduit que  $\phi_j^{(n)}(0) = 0$  pour  $n \geq 3$ . Les composantes de  $\phi$  sont bien quadratiques.

La deuxième étape consiste à voir que les composantes de  $\phi$  sont en fait affines. Pour cela, revenons aux coordonnées homogènes :

$$f = [e^{\phi_1} : \dots : e^{\phi_{k+1}}] \text{ avec } \deg(\phi_i) \leq 2.$$

Il s'agit de montrer que  $\phi_i - \phi_j$  est affine pour toute paire d'indices. Convenons que  $i$  équivaut à  $j$  si c'est le cas pour la paire  $\{i, j\}$ . La remarque cruciale est la suivante :

*Soit  $Y_{ij} = \{z \mid |z_i| = |z_j| \geq |z_l| \text{ pour tout } l\}$  (cf. §3). Si  $f^{-1}(Y_{ij})$  n'est pas compact, alors  $i$  équivaut à  $j$ .*

En effet, on peut alors trouver  $a_n$  tendant vers l'infini avec  $f(a_n)$  tendant vers  $b$  dans  $Y_{ij}$ . Quitte à extraire, on peut supposer la suite  $(f(z + a_n))$  localement uniformément convergente par le théorème d'Ascoli puisque la dérivée de  $f$  est uniformément bornée. Il en est de même pour la suite des dérivées en 0 de la  $i$ -ième composante de  $(f(z + a_n))$  dans la carte  $(z_j = 1)$ , donc

$$(f_i/f_j)'(a_n) = (\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n))((f_i/f_j)(a_n))$$

converge.

Or  $(f_i/f_j)(a_n)$  tend vers  $b_i/b_j \neq 0$ . Ainsi  $\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)$  doit converger alors que  $\phi_i' - \phi_j'$  est affine et que  $a_n$  tend vers l'infini. Ceci force  $\phi_i' - \phi_j'$  à être constant et  $i$  équivaut à  $j$ .

Cette remarque permet de conclure : en effet, elle entraîne que le maximum des modules des composantes de  $f$  est réalisé par des composantes d'indices équivalents (par exemple à 1) hors d'un compact de  $\mathbb{C}$ . On aura ainsi, pour tout  $i$  :

$$\text{Re}(\phi_i)(z) \leq \text{Re}(\phi_1)(z) + O(|z|).$$

Donc  $\phi_i - \phi_1$  est affine pour tout  $i$ .  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] BABETS, V. A. Theorems of Picard type for holomorphic mappings. *Siberian Math. J.* 25 (1984), 195–200.
- [2] BOREL, E. Sur les zéros des fonctions entières. *Acta Math.* 20 (1897), 357–396.
- [3] BRODY, R. Compact manifolds and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 235 (1978), 213–219.
- [4] DEMAILLY, J.-P. and J. EL GOUL. Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space. *Amer. J. Math.* 122 (2000), 515–546.
- [5] DETHLOFF, G., G. SCHUMACHER and P. M. WONG. Hyperbolicity of the complements of plane algebraic curves. *Amer. J. Math.* 117 (1995), 573–599.
- [6] DETHLOFF, G., G. SCHUMACHER and P. M. WONG. On the hyperbolicity of the complements of curves in algebraic surfaces, the three-component case. *Duke Math. J.* 78 (1995), 193–212.
- [7] GRAUERT, H. Jetmetriken und hyperbolische Geometrie. *Math. Z.* 200 (1989), 149–168.
- [8] GREEN, M. Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties. *Amer. J. Math.* 97 (1975), 43–75.
- [9] KOBAYASHI, S. *Hyperbolic Complex Spaces*. Grundlehren der math. Wissenschaften 318. Springer (1998), Berlin.
- [10] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Ann. of Math. Studies 61. Princeton University Press (1968), Princeton.
- [11] SIU, Y.-T. and S.-K. YEUNG. Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane. *Invent. Math.* 124 (1996), 573–618.
- [12] ZALCMAN, L. A heuristic principle in complex function theory. *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 813–817.
- [13] — Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 35 (1998), 215–230.

(Reçu le 9 novembre 2000)

F. Berteloot

J. Duval

Laboratoire Émile Picard

UMR CNRS 5580

Université Paul Sabatier

F-31062 Toulouse Cedex 4

France

e-mail: berteloo@picard.ups-tlse.fr

duval@picard.ups-tlse.fr

**Vide-leer-empty**