Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

Autor: Gabard, Alexandre

Kapitel: 7. Le problème de Klein: construction de courbes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64798

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈME (Fiedler 1978). *Soient C_1, C_2 deux courbes planes de degrés respectifs d_1, d_2 réelles, lisses et transverses, et C une courbe réelle lisse de degré $d = d_1 + d_2$ voisine de $C_1 \cdot C_2 = 0$ qui simplifie (de façon non-précisée pour l'instant) tous les points doubles de $C_1 \cdot C_2 = 0$.*

- *Il suffit qu'une des deux courbes C_1 ou C_2 soit non-séparante, pour que la courbe C le soit, et ce indépendamment des simplifications effectuées. Autrement dit en termes génétiques, « non-séparant » est un caractère dominant.*
- *Si par contre les courbes C_1 et C_2 sont de caractères récessifs, c'est-à-dire séparantes, et si en outre tous les $d_1 \cdot d_2$ points d'intersection de C_1 avec C_2 sont réels (cette condition pourra être satisfaite dans les constructions à venir) alors, d'après Brusotti, la courbe $C_1 \cdot C_2 = 0$ peut être simplifiée de $2^{d_1 \cdot d_2}$ façons distinctes, mais parmi tous ces choix de simplifications, exactement deux livrent des courbes séparantes, à savoir celui qui est toujours positif, respectivement toujours négatif, relativement à des orientations complexes fixées de C_1 et C_2. De plus pour un tel choix de simplifications dicté par les orientations complexes, l'orientation complexe de la courbe simplifiée C se déduit par transfert de celle de l'un de ses deux parents.*

Preuve. Seule la seconde assertion nécessite une explication. La simplification de chaque nœud de $C_1 \cdot C_2 = 0$ (qui sont tous réels et non-isolés) revient à attacher une anse contenant deux brins réels sur l'union disjointe de C_1 avec C_2. Cette anse privée des brins réels relie une moitié de C_1 avec une moitié de C_2 (ainsi que les moitiés conjuguées correspondantes). Ainsi pour que la courbe simplifiée C soit séparante, il faut (et il suffit) que toutes les simplifications effectuées correspondent à des attachements d'anses reliant systématiquement les mêmes moitiés. Ainsi notre seule liberté, si on aspire à fabriquer une courbe C séparante, réside dans le choix des deux moitiés que l'on relie initialement, et il est clair que l'on dispose de deux tels choix. □

7. LE PROBLÈME DE KLEIN : CONSTRUCTION DE COURBES

On va commencer par traiter le cas des degrés pairs, le cas des degrés impairs admettera ensuite un traitement similaire. Les constructions qu'on va entreprendre se décomposent en les étapes suivantes :

Étape 0. On commence par s'entraîner avec les petits degrés $d = 2, 4$.

Étape 1. On rappelle la *méthode de Hilbert* de construction de courbes Harnack-maximales.

Étape 2. Ensuite en vertu de Brusotti, on va explorer d'autres choix de simplifications qui vont livrer des *courbes non-séparantes* avec moins d'ovales.

Étape 3. On disposera alors déjà d'un système d'invariants permettant d'attraper toutes les non-séparantes, via une opération simple qui consiste à rajouter une *petite conique*.

Étape 4. A ce stade, il nous restera à réaliser les *courbes séparantes* non prohibées par Rohlin, qui s'obtiendront en exploitant les 2 choix de simplifications compatibles avec les orientations complexes.

Étape 5. Enfin, en répertoriant les invariants ainsi réalisés, on constatera qu'il nous manque encore quelques invariants non prohibés par Rohlin, que l'on attrapera cependant par de petites constructions « ad hoc ».

7.1 Les courbes de degré pair

Étape 0. • Pour $d = 2$ on a $g = 0$, et il n'y a alors que deux surfaces symétriques qui sont la sphère équatoriale et antipodale, respectivement réalisées par $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = -1$.

Observer plus généralement que $x^d + y^d = -1$ livre les invariants $(d, r = 0, 1)$ pour tout d pair.

• Pour $d = 4$, on considère une paire de coniques réelles $C_2 \cup E_2 \subset \mathbf{P}^2$ s'intersectant en 4 points réels, que l'on peut déformer en les quartiques réelles lisses de la Figure 9. D'après Fiedler la première et la dernière de ces courbes (que Klein appelait la *Gürtelkurve*) sont séparantes (les simplifications effectuées étant compatibles avec les orientations complexes) et toutes les autres sont non-séparantes.

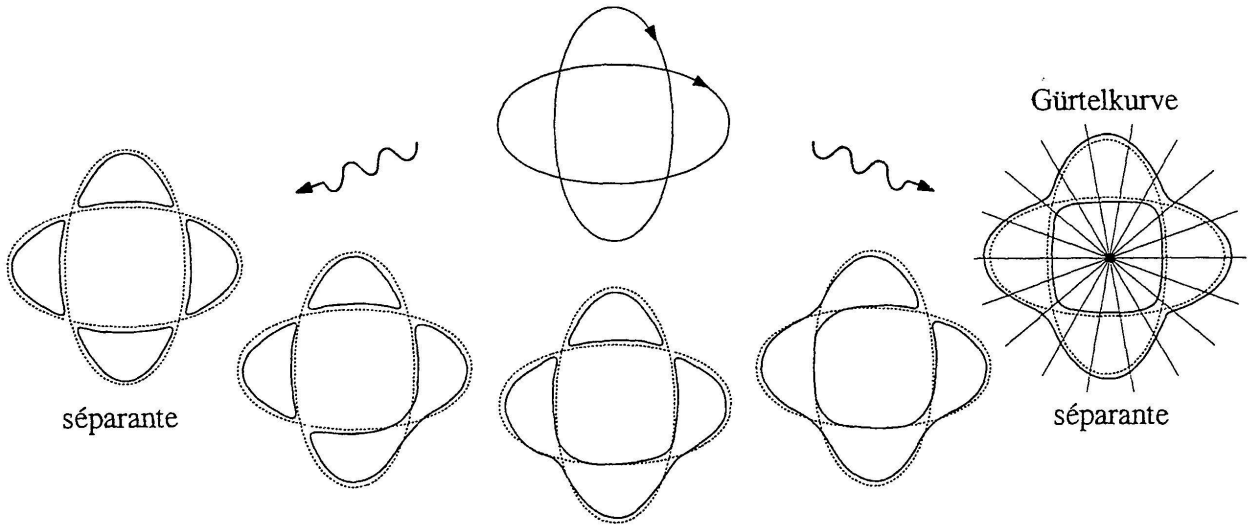

FIGURE 9

En se souvenant des 6 surfaces symétriques de genre $g = 3$ (cf. Figure 2), on observe que pour $d = 4$ il n'y a pas de restrictions aux invariants de Klein.

REMARQUE. Un argument plus synthétique pour réveler le caractère séparant de la Gürtelkurve, consiste à regarder le pinceau des droites passant par un point p réel choisi le plus à l'intérieur du nid (cf. Figure 9). Ce pinceau jouit de la propriété remarquable que tous ses membres réels (qui sont des droites réelles par p) découpent sur C_4 exclusivement des points réels. Le morphisme correspondant $C_4 \to \mathbf{P}^1$ est donc *saturé*, i.e. ses fibres au-dessus des points réels sont toutes exclusivement formées de points réels. Par suite, il envoie les points imaginaires de C_4 sur des points imaginaires du pinceau qui s'identifie à une sphère équatoriale. Cette dernière étant séparante, il en résulte que C_4 l'est aussi.

Ce même argument montre plus généralement que la borne inférieure de Rohlin est toujours réalisée, i.e. pour tout degré d il existe une courbe plane réelle lisse séparante avec $r = [\frac{d+1}{2}]$ composantes. En effet, en perturbant un peu une réunion de k cercles concentriques, on peut obtenir une courbe C_d lisse de degré pair $d = 2k$ avec $r = k$ composantes. Une telle courbe est séparante (il suffit comme plus haut de considérer le pinceau des droites par un point choisi le plus à l'intérieur du nid). Pour les degrés impairs, il suffit de rajouter à la configuration précédente une droite réelle « à l'infini » (et de lissifier le tout).

Étape 1. Rappelons maintenant la *méthode de Hilbert* de construction de M-courbes (cf. [Gu], p. 20) qui s'effectue séparément suivant la parité du degré.

Considérons deux coniques réelles C_2 et E_2 s'intersectant en 4 points réels p_1, p_2, p_3, p_4, et C_4^0 une quartique voisine avec $r = 4$. Soit $\vartheta_4 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4$ une quartique réunion de 4 droites réelles intersectant chacune l'arc de $E_2(\mathbf{R})$ délimité par p_1 et p_2 en 2 points (cf. Figure 10), et considérons alors $C_4 := C_4^0 + \varepsilon\vartheta_4 = 0$ où ε désigne un petit nombre réel.

Cette petite perturbation a pour effet de faire « vibrer » un des ovales de notre quartique C_4^0 relativement à la conique E_2 (cf. Figure 10). On applique ensuite Brusotti à la courbe $C_4 \cdot E_2 = 0$ et le choix de simplifications de la Figure 10 fournit une courbe lisse C_6 qui possède $r = 4 + (3 + 4) = 11$ ovales, ce qui est la borne de Harnack pour $d = 6$.

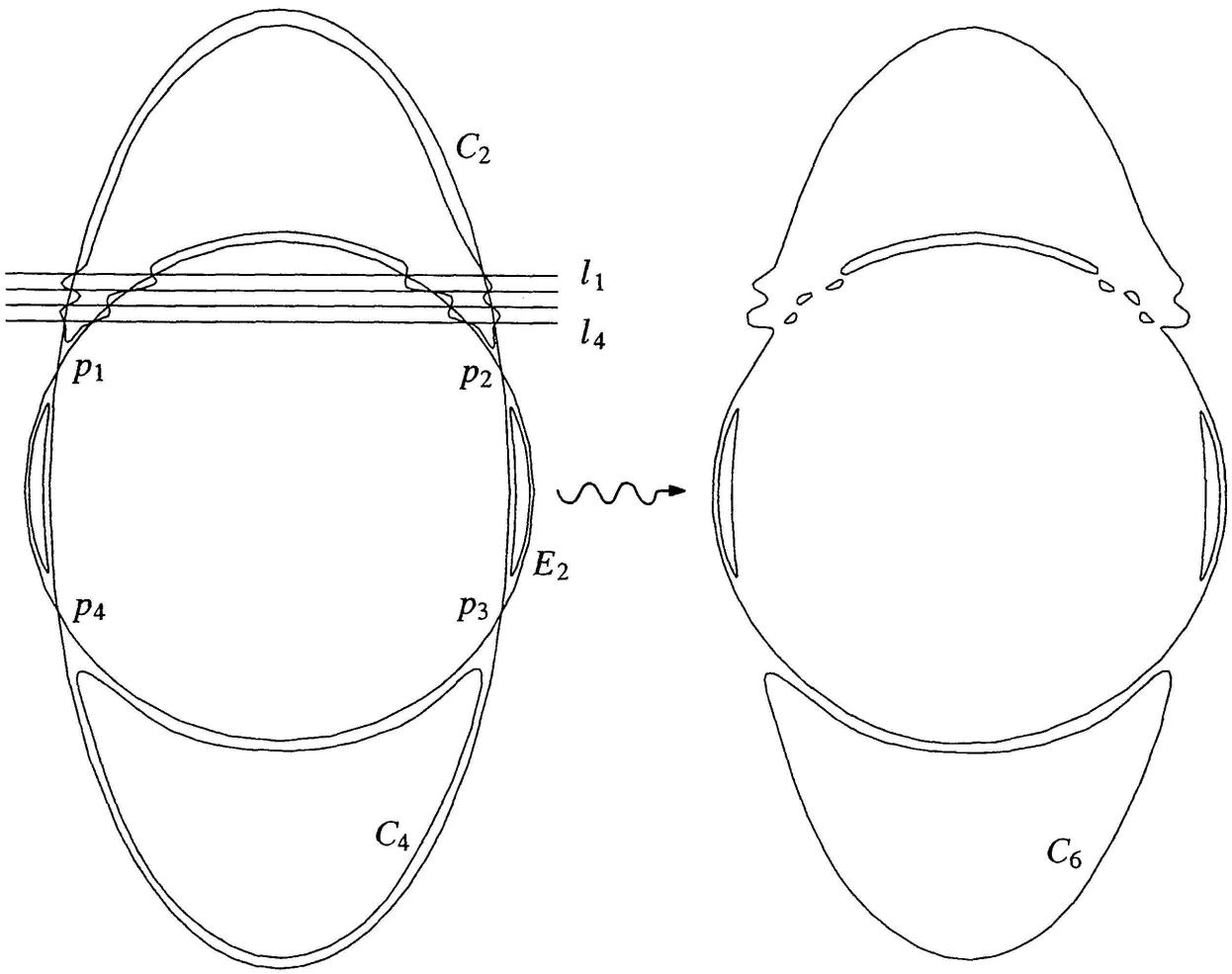

FIGURE 10

La méthode de Hilbert peut se schématiser par le dessin de la Figure 11, et en exploitant les 2 choix de simplifications de $C_4 \cdot E_2 = 0$ compatibles avec des orientations complexes on obtient deux courbes séparantes avec $r = 4 + (3 + 4) = 11$ et $r = 4 + 1 = 5$ respectivement (cf. Figure 11).

REMARQUE. Noter ici qu'il n'est même pas nécessaire de connaître explicitement l'orientation complexe de C_4, vu que l'intersection $C_4 \cap E_2$ est monopolisée par un seul ovale de C_4. Il suffit d'orienter (arbitrairement) les ovales de $C_4(\mathbf{R})$ et de $E_2(\mathbf{R})$ se rencontrant, et ces orientations locales (i.e. d'un ovale sur chaque courbe) se prolongeront univoquement en des orientations complexes des ovales restants, mais qu'il est inutile d'expliciter vu qu'elles n'influenceront pas le choix de simplifications.

Étape 2. L'observation importante est maintenant qu'en faisant varier le choix des simplifications de la courbe $C_4 \cdot E_2 = 0$ de la Figure 11 (ce qui est loisible d'après Brusotti), on peut aussi obtenir les courbes de la Figure 12, qui

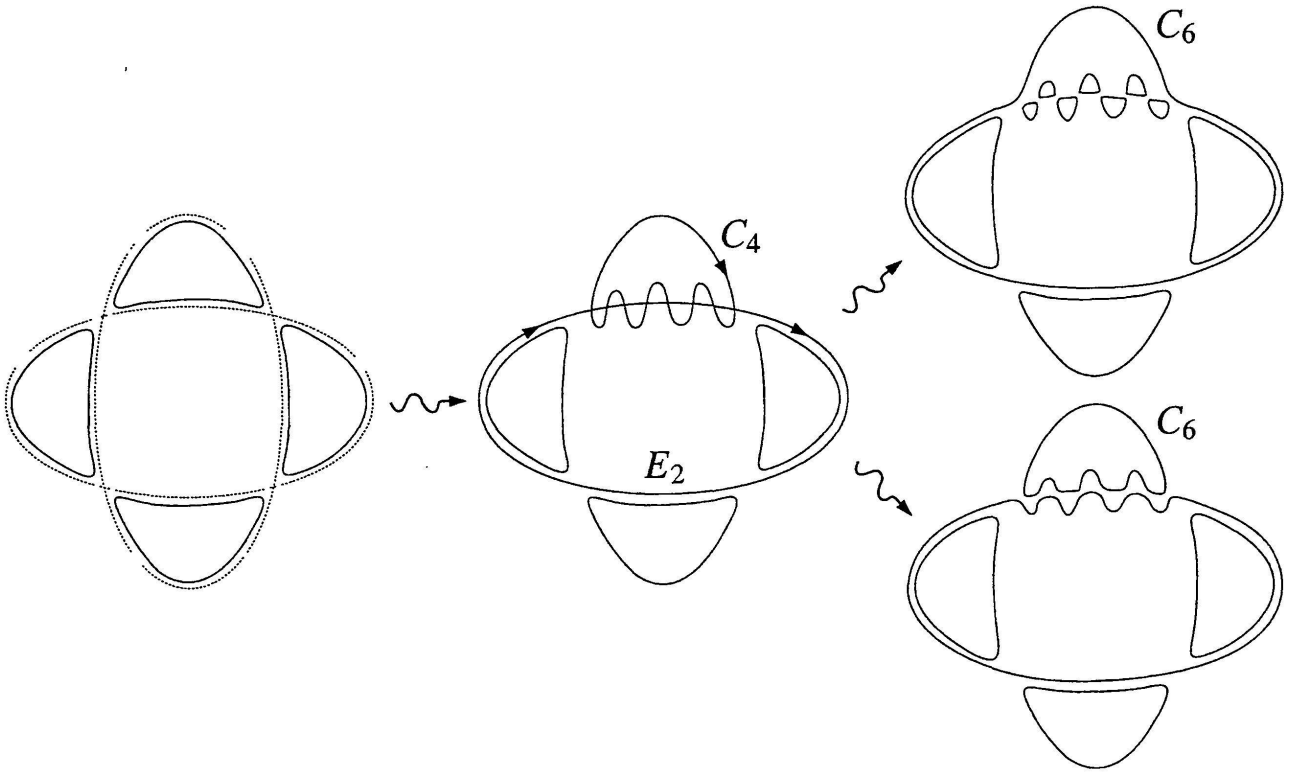

FIGURE 11

sont toutes non-séparantes (les deux choix séparants ayant déjà été exploités).

Observer que l'invariant r diminue successivement d'une unité $r = 10, 9, \ldots, 4$ jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré pair précédent. Je parle de *grignotage d'ovales dans une M-courbe de Hilbert.*

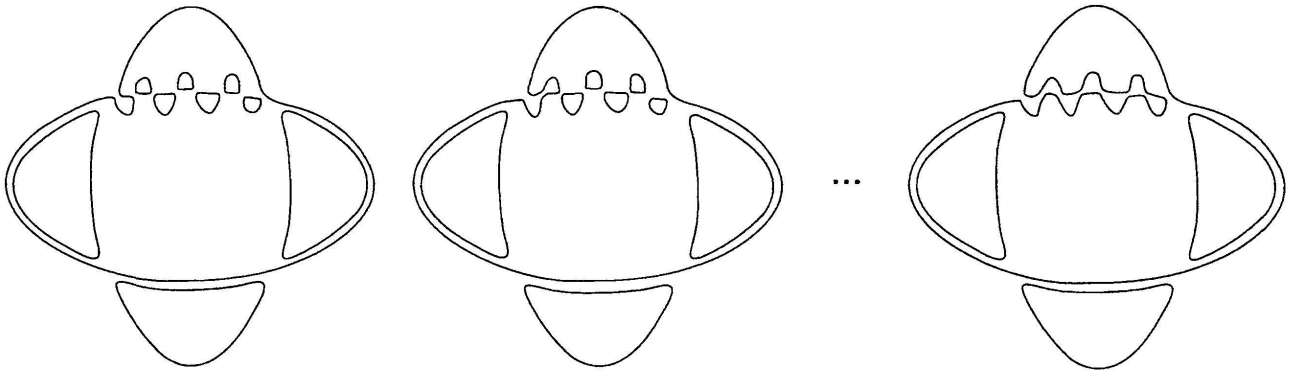

FIGURE 12

On itère ensuite la construction de Hilbert en faisant vibrer un ovale de la M-courbe C_6 de la Figure 11, ce qui fournit une nouvelle courbe C_6 de degré 6 qui oscille à travers E_2 au voisinage de l'ovale excité (cf. Figure 13). Ensuite en simplifiant les points doubles de $C_6 \cdot E_2 = 0$, on peut obtenir la courbe C_8 de degré 8 de la Figure 13, qui possède $r = 11 + (5 + 6) = 22$ ovales.

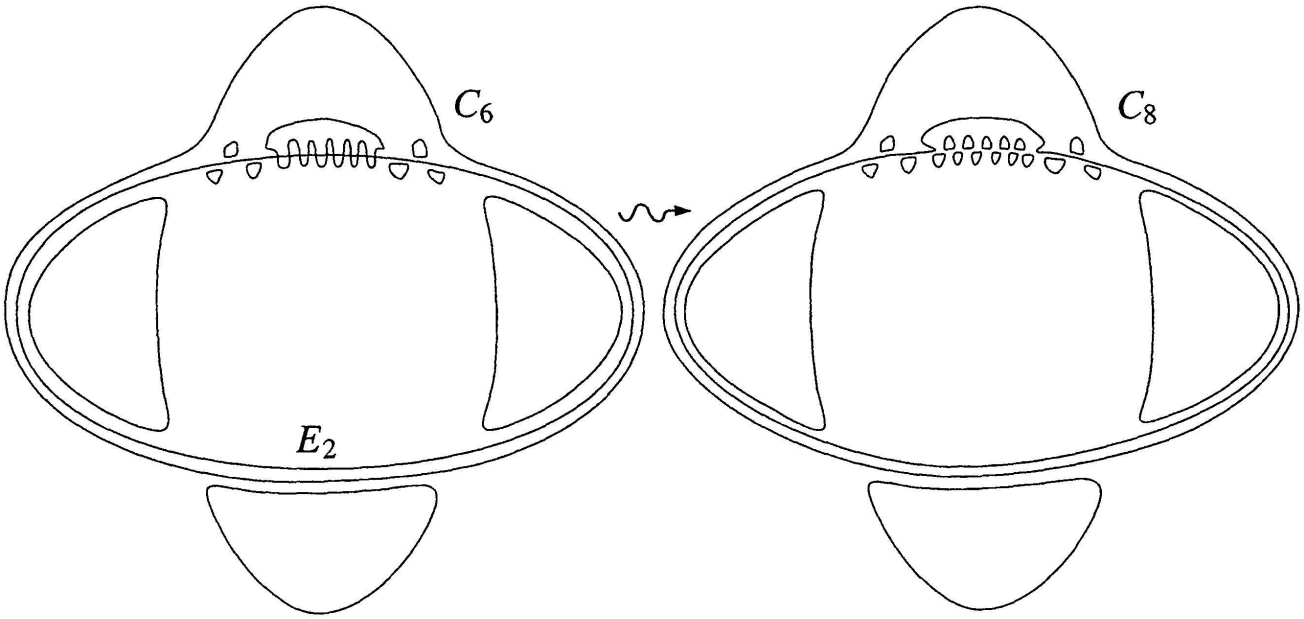

FIGURE 13

REMARQUE. On observe que l'on rajoute toujours à l'invariant r deux entiers consécutifs, ce qui permet de se convaincre que les courbes C_d construites par Hilbert réalisent bien toujours la borne de Harnack, puisque $r = (1+2)+(3+4)+\cdots+(d-3)+(d-2)+1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2}+1 = g+1$.

Faisons le point sur le diagramme des involutions (restreint aux degrés pairs) des valeurs des invariants (d, r, a) obtenus par cette méthode de grignotage dans une M-courbe de Hilbert (cf. Figure 14).

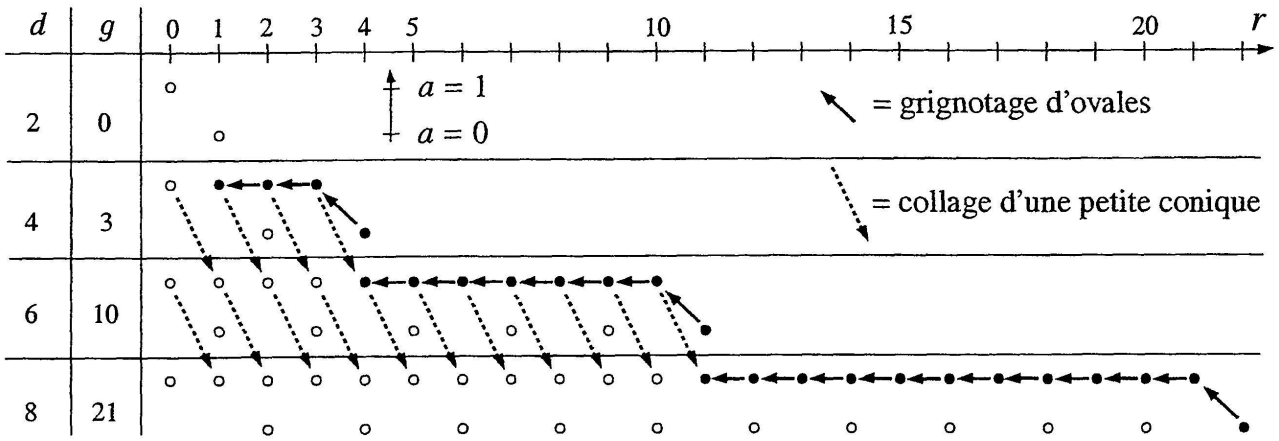

FIGURE 14

Cette méthode fournit des courbes non-séparantes C_d avec un invariant r décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré pair précédent, i.e. $M(d-2) = g(d-2)+1$.

Étape 3. Ensuite étant donné une courbe non-séparante C_d, on peut toujours lui rajouter une *petite conique* C_2, c'est-à-dire une conique réelle, ayant des points réels, mais de partie réelle disjointe de celle de C_d et (de complexifiée) transverse à C_d. La courbe $C_d \cdot C_2 = 0$ possède alors $2d$ nœuds imaginaires conjugués dont la simplification fournit une courbe C_{d+2} non-séparante (« non-séparant » étant un caractère dominant) et qui possède un ovale de plus que la courbe donnée, i.e. $r(C_{d+2}) = r(C_d) + 1$. On baptise cette opération le *collage d'une petite conique.*

REMARQUE. Pour fabriquer une telle petite conique, il suffit de choisir un point p de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ n'appartenant pas à $C_d(\mathbf{R})$ et de perturber un peu le produit d'une droite imaginaire l passant par p et transverse à C_d avec sa droite conjuguée l^σ de sorte que le point réel isolé p de la conique dégénérée $l \cdot l^\sigma = 0$ se transforme en un petit ovale autour de p. On peut déjà observer que cette opération s'appliquera également lorsque d sera impair.

Ainsi il est aisé (au niveau des courbes non-séparantes) de réaliser l'opération $(d, r, 1) \mapsto (d+2, r+1, 1)$. D'autre part, comme les non-séparantes avec $r = 0$ s'obtiennent en considérant l'équation $x^d + y^d = -1$, on constate avec satisfaction en contemplant le diagramme des involutions (cf. Figure 14), que l'on dispose déjà d'un système de courbes non-séparantes permettant, moyennant itération successive de l'opération de collage d'une petite conique, d'attraper toutes les courbes non-séparantes restantes. Ceci montre qu'en degré pair tous les invariants des courbes non-séparantes sont réalisables dans le plan.

Étape 4. A ce stade il ne nous reste plus qu'à construire les courbes séparantes non prohibées par Rohlin, i.e. avec r tel que :

$$\frac{d}{2} \leq r \leq g(d) + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad r \equiv g(d) + 1 \pmod 2.$$

L'idée pour attraper d'autres valeurs intermédiaires de r consiste à appliquer la même technique de vibration d'un ovale, mais cette fois à une courbe séparante non nécessairement Harnack-maximale.

Explicitement, au lieu de démarrer avec une M-courbe de degré 4, on considère la quartique C_4 de la Figure 15 avec $(d, r, a) = (4, 2, 0)$. On peut faire vibrer un ovale de C_4 relativement à E_2 (cf. Figure 15), et les 2 choix de simplifications de $C_4 \cdot E_2 = 0$ compatibles avec des orientations complexes livrent des courbes séparantes avec $r = 2 + (3 + 4) = 9$ et $r = 2 + 1 = 3$ respectivement (cf. Figure 15).

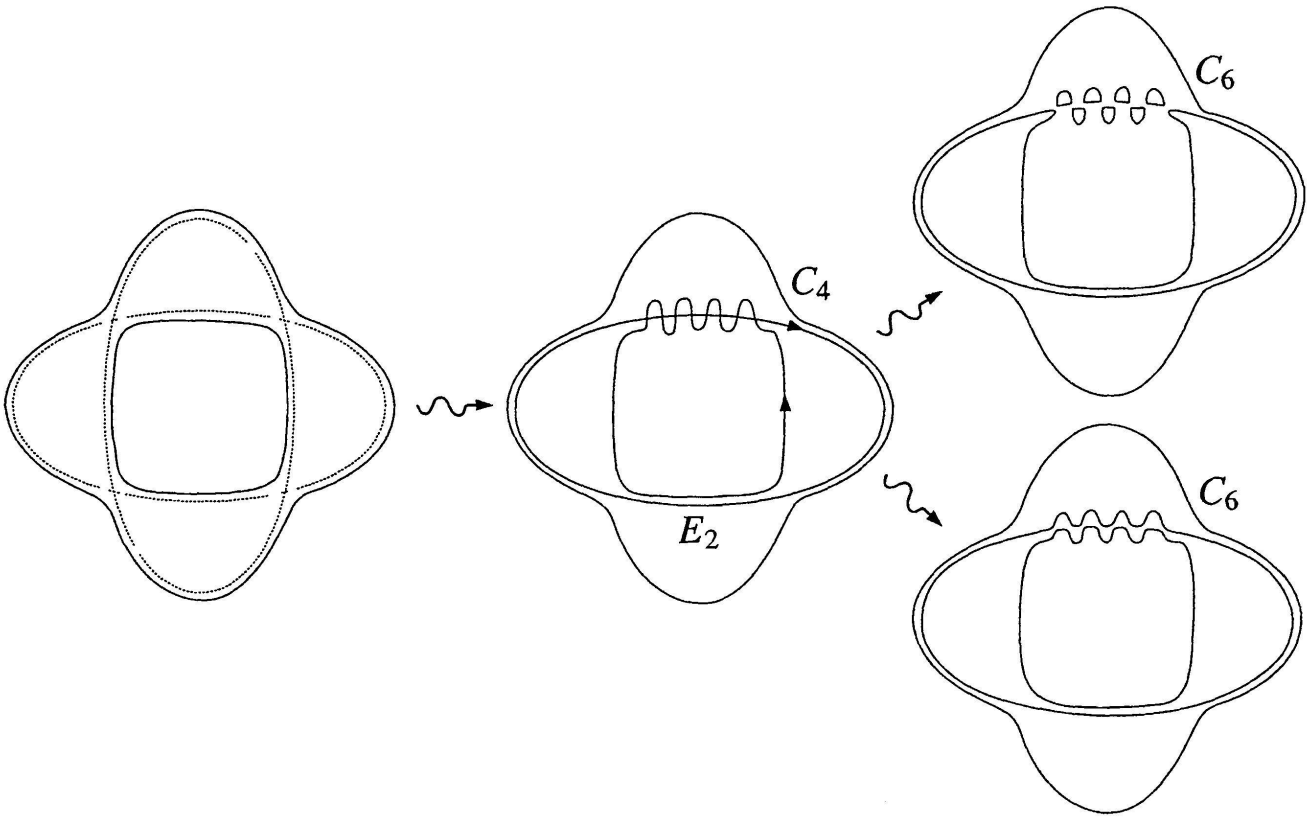

FIGURE 15

Plus généralement, la même technique (de vibration d'un ovale de C_d relativement à une conique génératrice E_2, suivie des 2 simplifications de $C_d \cdot E_2 = 0$ compatibles avec des orientations complexes) permet de construire à partir d'une courbe d'invariants $(d, r, 0)$ deux courbes séparantes d'invariants $(d+2, r+2d-1, 0)$ et $(d+2, r+1, 0)$ avec r croîssant respectivement à la vitesse de la borne de Harnack (*lissification maximale*) et à vitesse 1 (*lissification atténuée*).

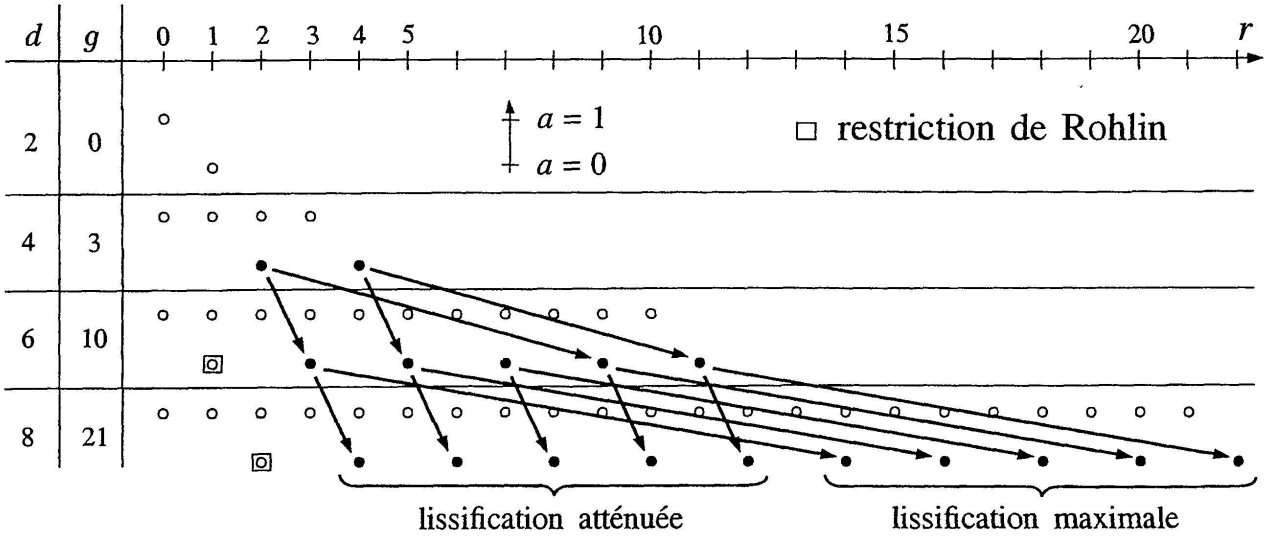

FIGURE 16

Visualisons les invariants ainsi réalisés sur le diagramme des involutions (cf. Figure 16). On observe que pour $d = 8$, les lissifications atténuées et maximales effectuent une «jonction» (cf. Figure 16), qui ne fera que s'accroître pour les degrés supérieurs. Ce qui garantit que l'on a mis la main sur presque tous les invariants Rohlin-admissibles pour les courbes séparantes.

Étape 5. On note cependant que pour $d = 6$, il nous manque encore la courbe d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$ qui échappe à cette méthode. Il n'est cependant pas difficile d'imaginer une petite construction «ad hoc» qui colmate cette lacune éphémère. On considére à cet effet la configuration de 3 coniques transverses de la Figure 17, dont la déformation proposée fournit la courbe C_6 manquante d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$. (Noter que c'est l'unique endroit dans tout l'argument où il est nécessaire de connaître explicitement une orientation complexe).

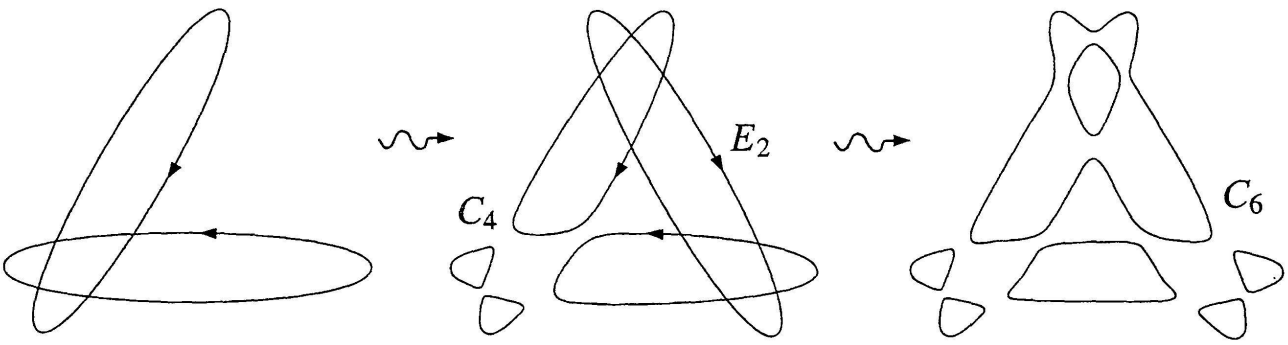

FIGURE 17

En résumé nous avons démontré:

THÉORÈME 7.1. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré pair, la restriction de Rohlin est la seule sur les invariants* (d, r, a).

7.2 LES COURBES DE DEGRÉ IMPAIR

Il nous reste à traiter le cas des courbes de degré impair; les valeurs admissibles des invariants (d, r, a) sont alors résumées par la Figure 18.

A nouveau on utilise la méthode de Hilbert, qui pour les degrés impairs démarre avec C_1 une droite réelle et E_2 une conique réelle rencontrant C_1 en deux points réels. La déformation de $C_1 \cdot E_2 = 0$ de la Figure 19 fournit une M-courbe C_3 de degré 3.

Ensuite on construit une M-courbe C_5 de degré 5 en faisant vibrer une des composantes de C_3, ce qui fournit une nouvelle cubique C_3 oscillant

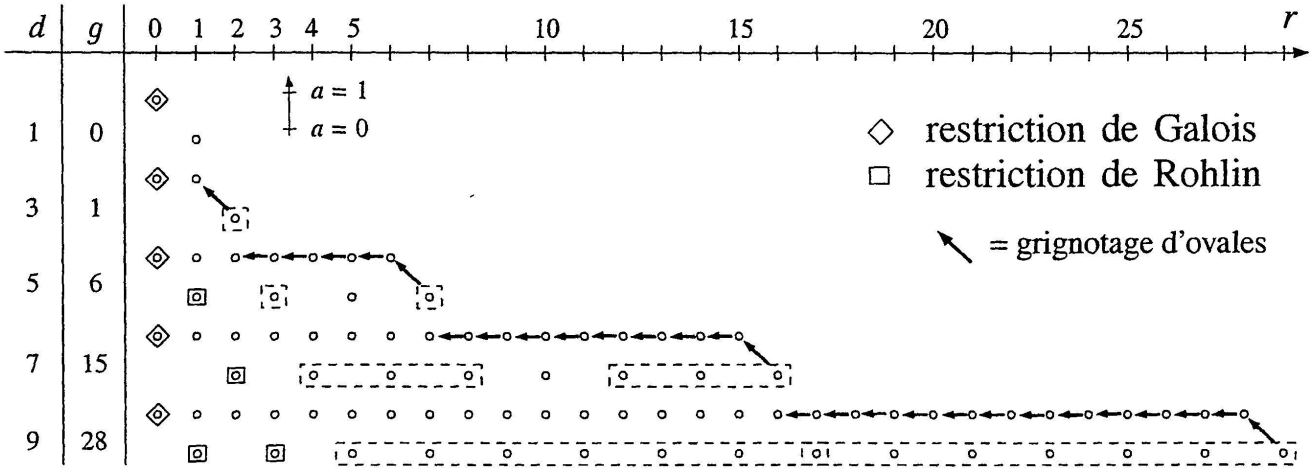

FIGURE 18

relativement à la conique génératrice E_2 (cf. Figure 19). La simplification dessinée des points doubles de $C_3 \cdot E_2 = 0$ fournit la M-courbe C_5 cherchée.

Ensuite la même technique de grignotage des ovales nouveau-nés dans une M-courbe de Hilbert, fournit des courbes non-séparantes avec un invariant r décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré impair précédent, i.e. $M(d-2)$. Les invariants (d, r, a) ainsi réalisés sont schématisés par des flèches sur la Figure 18. Ensuite en complétant la famille des courbes ainsi obtenues avec les *courbes de Fermat* de degré impair $F_d : x^d + y^d = 1$ qui ont $r = 1$ et qui sont non-séparantes pour $d \geq 3$ (d'après l'inégalité de Rohlin par exemple), on met à nouveau la main sur un système de courbes permettant d'engendrer toutes les non-séparantes via l'opération de collage d'une petite conique. Ainsi la restriction de Galois est la seule pour les courbes non-séparantes de degré impair.

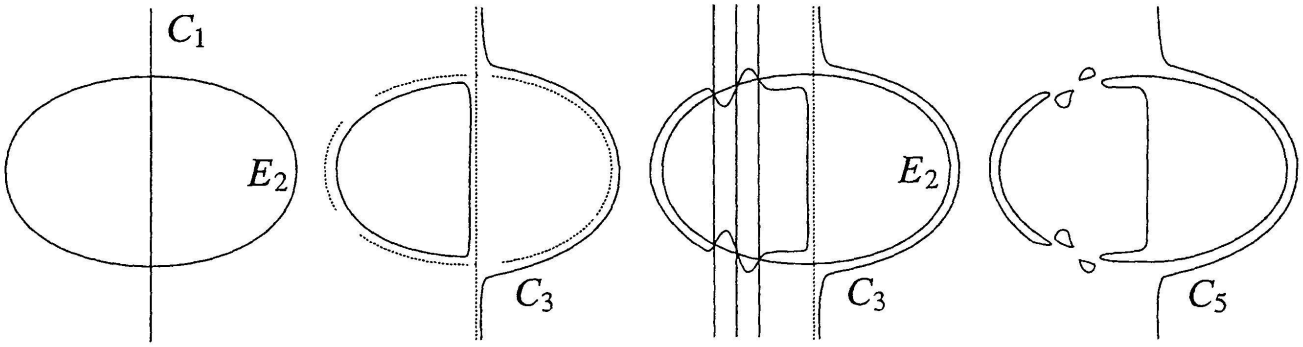

FIGURE 19

Pour les séparantes, la même méthode qu'avant fournit les invariants délimités par la ligne en tirets sur le diagramme des involutions (cf. Figure 18). On observe cette fois que l'on manque deux invariants Rohlin-admissibles,

à savoir $(d,r,a) = (5,5,0)$ et $(d,r,a) = (7,10,0)$: le premier s'obtient en rajoutant une droite à une courbe d'invariants $(d,r,a) = (4,4,0)$, puis en simplifiant de façon compatible avec les orientations complexes (cf. Figure 20).

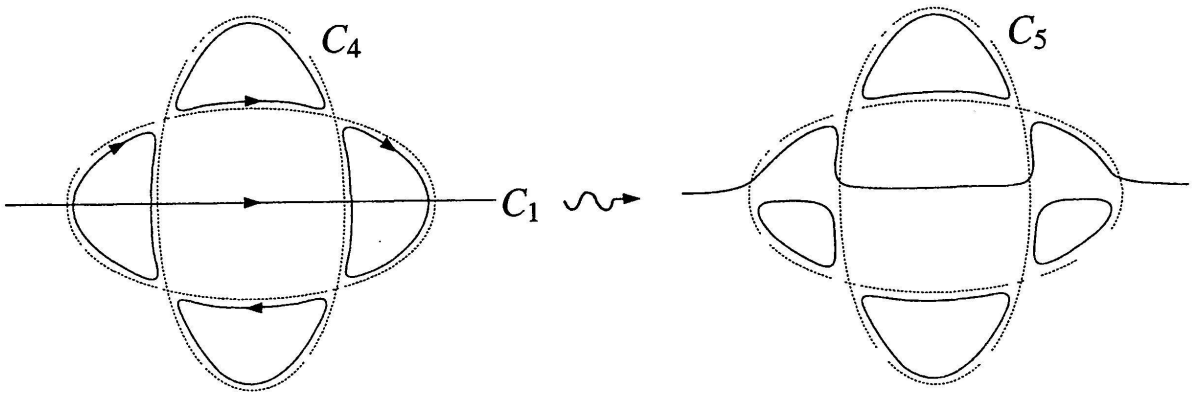

FIGURE 20

Le second s'obtient de la même manière à partir de la courbe de la Figure 15 d'invariants $(d,r,a) = (6,9,0)$ (cf. Figure 21).

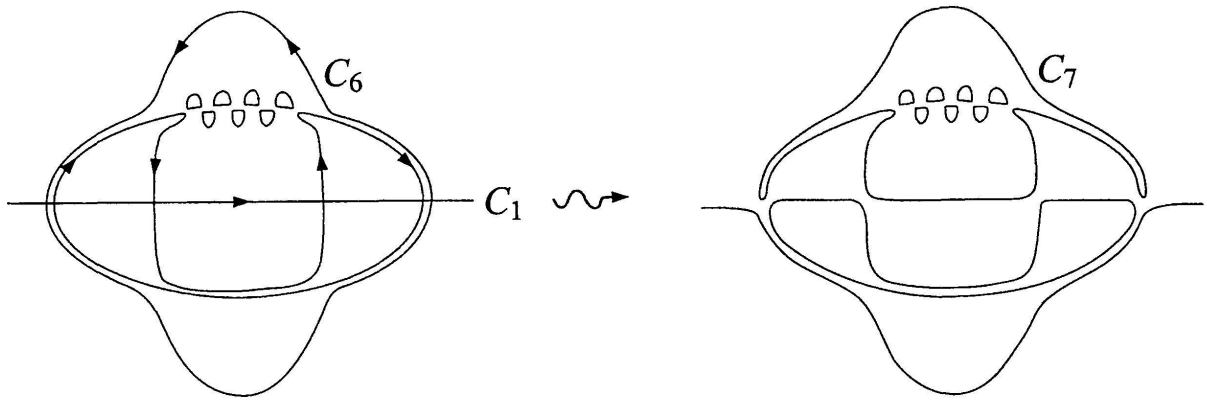

FIGURE 21

En résumé nous avons démontré :

THÉORÈME 7.2. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré impair, les restrictions de Galois et de Rohlin sont les seules sur les invariants* (d,r,a).

Cela résout donc complètement le problème de Klein de la caractérisation des surfaces symétriques réalisables comme courbes réelles lisses dans le *plan*.