6. La génétique chez les courbes planes réelles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

moitiés (rebouchées par les adhérences des intérieurs des ovales) il obtient la formule :

$$(1) \qquad 2(\Pi^{+} - \Pi^{-}) = r - k^2$$

où $k = \frac{d}{2}$ et où l'on suppose le degré d pair (le cas des degrés impairs nécessite une discussion parallèle effectuée par Mishachev [Mi]). Pour plus de détails on renvoie à [R1], où la formule (1) est démontrée dans le cas particulier des courbes Harnack-maximales (aussi appelées *M-courbes*), et pour l'énoncé général, on consultera [R2], p. 91.

Ensuite il est purement formel à partir de la *formule de Rohlin* (1) de déduire l'inégalité de Rohlin. En effet, si $\Pi = \Pi^{+} + \Pi^{-}$ désigne le nombre total de paires d'ovales emboîtés, on a $\Pi \le \binom{r}{2}$, et alors d'après (1) :

$$r = k^2 + 2(\Pi^{+} - \Pi^{-}) \ge k^2 - 2\Pi^{-} \ge k^2 - 2\Pi \ge k^2 - 2\binom{r}{2} = k^2 - r(r-1).$$

En se concentrant sur les membres extrêmes, on en tire $r^2 \ge k^2$, et donc $r \ge k$. Ce qui est précisément l'inégalité de Rohlin pour d pair. On laisse au soin du lecteur, la tâche analogue pour les degrés impairs en utilisant cette fois la formule de Mishachev (cf. [R2], p. 91). □

La suite de l'exposé est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui résout complètement le problème de Klein :

THÉORÈME 5.2. *Les restrictions de Galois (si $d \equiv 1 \pmod 2$ alors $r \ge 1$) et de Rohlin (si $a = 0$ alors $r \ge [\frac{d+1}{2}]$) sont les seules contraintes sur les invariants (d, r, a) de Klein pour les courbes algébriques planes réelles lisses.*

6. La génétique chez les courbes planes réelles

Avant de construire des courbes, notre problème exige une compréhension du comportement de l'invariant a lorsque l'on « accouple » deux courbes planes réelles lisses transverses en simplifiant tous leurs points d'intersection à la Brusotti. A ce sujet, on a le résultat suivant dû à Fiedler (cf. [Fi], pp. 7–9) :

THÉORÈME (Fiedler 1978). *Soient* C_1, C_2 *deux courbes planes de degrés respectifs* d_1, d_2 *réelles, lisses et transverses, et* C *une courbe réelle lisse de degré* $d = d_1 + d_2$ *voisine de* $C_1 \cdot C_2 = 0$ *qui simplifie (de façon non-précisée pour l'instant) tous les points doubles de* $C_1 \cdot C_2 = 0$.

- *Il suffit qu'une des deux courbes* C_1 *ou* C_2 *soit non-séparante, pour que la courbe* C *le soit, et ce indépendamment des simplifications effectuées. Autrement dit en termes génétiques, « non-séparant » est un caractère dominant.*

- *Si par contre les courbes* C_1 *et* C_2 *sont de caractères récessifs, c'est-à-dire séparantes, et si en outre tous les* $d_1 \cdot d_2$ *points d'intersection de* C_1 *avec* C_2 *sont réels (cette condition pourra être satisfaite dans les constructions à venir) alors, d'après Brusotti, la courbe* $C_1 \cdot C_2 = 0$ *peut être simplifiée de* $2^{d_1 \cdot d_2}$ *façons distinctes, mais parmi tous ces choix de simplifications, exactement deux livrent des courbes séparantes, à savoir celui qui est toujours positif, respectivement toujours négatif, relativement à des orientations complexes fixées de* C_1 *et* C_2. *De plus pour un tel choix de simplifications dicté par les orientations complexes, l'orientation complexe de la courbe simplifiée* C *se déduit par transfert de celle de l'un de ses deux parents.*

Preuve. Seule la seconde assertion nécessite une explication. La simplification de chaque nœud de $C_1 \cdot C_2 = 0$ (qui sont tous réels et non-isolés) revient à attacher une anse contenant deux brins réels sur l'union disjointe de C_1 avec C_2. Cette anse privée des brins réels relie une moitié de C_1 avec une moitié de C_2 (ainsi que les moitiés conjuguées correspondantes). Ainsi pour que la courbe simplifiée C soit séparante, il faut (et il suffit) que toutes les simplifications effectuées correspondent à des attachements d'anses reliant systématiquement les mêmes moitiés. Ainsi notre seule liberté, si on aspire à fabriquer une courbe C séparante, réside dans le choix des deux moitiés que l'on relie initialement, et il est clair que l'on dispose de deux tels choix. □

7. LE PROBLÈME DE KLEIN : CONSTRUCTION DE COURBES

On va commencer par traiter le cas des degrés pairs, le cas des degrés impairs admettera ensuite un traitement similaire. Les constructions qu'on va entreprendre se décomposent en les étapes suivantes :

Étape 0. On commence par s'entraîner avec les petits degrés $d = 2, 4$.

Étape 1. On rappelle la *méthode de Hilbert* de construction de courbes Harnack-maximales.