

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | L'Enseignement Mathématique   |
| <b>Herausgeber:</b> | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique                              |
| <b>Band:</b>        | 46 (2000)   |
| <b>Heft:</b>        | 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  |
| <br>                |   |
| <b>Artikel:</b>     | TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN               |
| <b>Autor:</b>       | Gabard, Alexandre   |
| <b>Kapitel:</b>     | 5. Le problème de Klein: description des prohibitions                                 |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-64798">https://doi.org/10.5169/seals-64798</a> |

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 5. LE PROBLÈME DE KLEIN: DESCRIPTION DES PROHIBITIONS

Pour une courbe *plane* lisse  $C \subset \mathbf{P}^2$ , le genre est  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , où  $d$  désigne le degré de la courbe  $C$ . On va donc se restreindre aux genres de cette forme, et il devient maintenant commode de substituer aux invariants  $(g, r, a)$  les invariants  $(d, r, a)$ .

Pour les degrés  $d$  impairs, une courbe plane réelle a toujours des points réels; si bien qu'il est impossible de réaliser la surface symétrique sans point fixe. Je me référerai à cette restriction sous le terme de *restriction de Galois*.

Ensuite comme conséquence des travaux de Klein sur le dénombrement des caractéristiques-theta réelles impaires (cf. [K2]), Gross et Harris ont mis en évidence une restriction plus subtile: si  $d \equiv 5 \pmod{8}$  (auquel cas  $g \equiv 0 \pmod{2}$ ), alors il n'existe pas de courbe plane séparante avec  $r = 1$  (cf. [GrHa], Prop. 7.1, p. 173). Noter pourtant qu'une telle surface symétrique existe abstraitemment puisque  $g$  est pair (cf. Figure 8). Ainsi déjà en degré 5, les courbes planes présentent des lacunes vis-à-vis des invariants  $(d, r, a)$ : impossibilité de fabriquer une quintique (plane réelle lisse) séparante n'ayant qu'une composante.

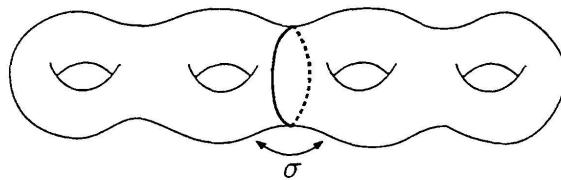


FIGURE 8

En fait on a une restriction beaucoup plus forte due à Rohlin (cf. [Ma], p. 59):

**THÉORÈME 5.1** (Inégalité de Rohlin). *Si  $C$  est une courbe plane réelle lisse séparante de degré  $d$ , alors  $r \geq [\frac{d+1}{2}]$ .*

*Preuve.* Etant donné une courbe séparante  $C$ , Rohlin observe que la partie réelle  $C(\mathbf{R})$  admet deux orientations de signes opposés comme bord des moitiés de  $C \setminus C(\mathbf{R})$  et parle d'*orientations complexes*. En supposant maintenant la courbe plane, il compare pour chaque paire d'ovales emboîtés, les orientations complexes de ses deux ovales à celles comme bord des orientations de l'anneau délimité par la paire dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ . Lorsque ces orientations coïncident il parle d'une *paire positive*, et dans le cas contraire d'une *paire négative*, et note  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  leur nombre respectif. En calculant l'intersection dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  des deux

moitiés (rebouchées par les adhérences des intérieurs des ovales) il obtient la formule :

$$(1) \quad 2(\Pi^+ - \Pi^-) = r - k^2$$

où  $k = \frac{d}{2}$  et où l'on suppose le degré  $d$  pair (le cas des degrés impairs nécessite une discussion parallèle effectuée par Mishachev [Mi]). Pour plus de détails on renvoie à [R1], où la formule (1) est démontrée dans le cas particulier des courbes Harnack-maximales (aussi appelées *M-courbes*), et pour l'énoncé général, on consultera [R2], p. 91.

Ensuite il est purement formel à partir de la *formule de Rohlin* (1) de déduire l'inégalité de Rohlin. En effet, si  $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$  désigne le nombre total de paires d'ovales emboîtés, on a  $\Pi \leq \binom{r}{2}$ , et alors d'après (1) :

$$r = k^2 + 2(\Pi^+ - \Pi^-) \geq k^2 - 2\Pi^- \geq k^2 - 2\Pi \geq k^2 - 2\binom{r}{2} = k^2 - r(r-1).$$

En se concentrant sur les membres extrêmes, on en tire  $r^2 \geq k^2$ , et donc  $r \geq k$ . Ce qui est précisément l'inégalité de Rohlin pour  $d$  pair. On laisse au soin du lecteur, la tâche analogue pour les degrés impairs en utilisant cette fois la formule de Mishachev (cf. [R2], p. 91).  $\square$

La suite de l'exposé est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui résout complètement le problème de Klein :

**THÉORÈME 5.2.** *Les restrictions de Galois (si  $d \equiv 1 \pmod{2}$  alors  $r \geq 1$ ) et de Rohlin (si  $a = 0$  alors  $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ ) sont les seules contraintes sur les invariants  $(d, r, a)$  de Klein pour les courbes algébriques planes réelles lisses.*

## 6. LA GÉNÉTIQUE CHEZ LES COURBES PLANES RÉELLES

Avant de construire des courbes, notre problème exige une compréhension du comportement de l'invariant  $a$  lorsque l'on « accouple » deux courbes planes réelles lisses transverses en simplifiant tous leurs points d'intersection à la Brusotti. A ce sujet, on a le résultat suivant dû à Fiedler (cf. [Fi], pp. 7–9) :