# 4. Le théorème de Klein

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

• *Si en outre la courbe $\Gamma$ est réelle, alors la courbe simplifiée $\Delta$ peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.*

*De plus chaque noeud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.*

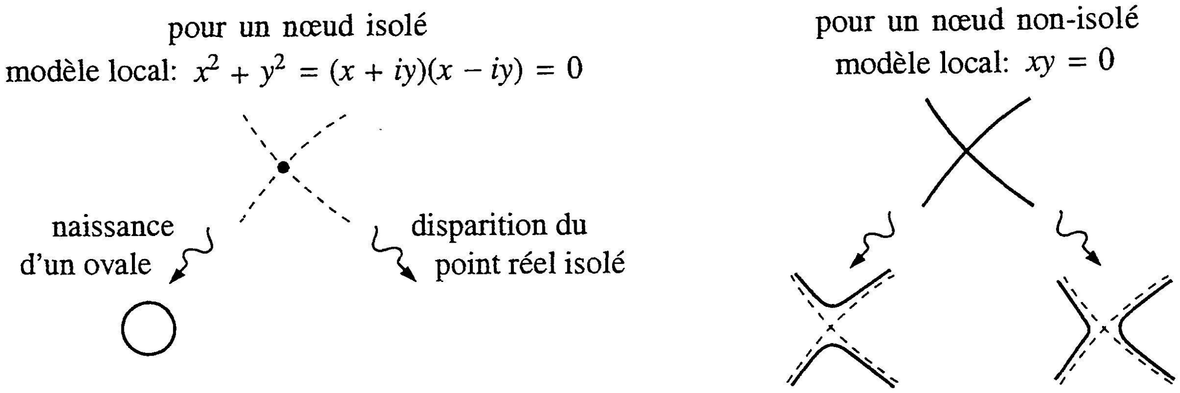


FIGURE 6

## 4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

THÉORÈME 4.1 (Klein 1882). *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

*Preuve.* Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser « algébro-géométriquement » l'opération d'attachement d'une anse baguée.

• Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$ où $f(x)$ est un polynôme réel de degré $2g+2$ ayant des racines distinctes. La normalisée $\widetilde{\Gamma}$ de la courbe projective $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ associée à $\Gamma_0$ est alors une courbe réelle de genre $g$.

1. Si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$, alors $\Gamma_0(\mathbf{R})$ est vide et donc $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{R})$ aussi. On obtient de la sorte (en considérant $\widetilde{\Gamma}$) pour tout $g$ une

courbe non-séparante avec $r = 0$. Autrement dit pour toutes les valeurs du genre, il existe une courbe réelle sans point réel.

2. Si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$, alors les fibres de la projection $\pi \colon \Gamma_0 \to \mathbf{A}^1$ sur l'axe des $x$ au-dessus des points réels sont exclusivement formées de points réels. Il en résulte que $\widetilde{\Gamma}$ est séparante. La congruence de Klein entraîne alors que $r \equiv g+1 \pmod 2$. Mais la restriction de $\pi \colon \widetilde{\Gamma} \to \mathbf{P}^1$ aux points réels induit un revêtement de degré 2 du cercle, et donc $r(\widetilde{\Gamma})$ vaut 1 ou 2. En particulier on voit que pour tout entier $g$ pair, il existe (avec $\widetilde{\Gamma}$) une courbe séparante de genre $g$ avec $r = 1$.

• L'opération topologique d'attachement d'une anse baguée admet la modélisation « algébro-géométrique » suivante :

Soient $C$ une courbe réelle lisse et $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ un modèle $\mathbf{R}$-birationnel plan de $C$ ayant au pire des singularités nodales. On choisit $p \in \Gamma \setminus \Gamma(\mathbf{R})$ un point imaginaire lisse, de sorte que $p$ admette un conjugué strict $p^\sigma \neq p$. On trace alors la « sécante galoisienne » $l := \overline{pp^\sigma}$, qui pour un choix générique de $p$ sera transverse à $\Gamma$. Une telle droite est définie sur $\mathbf{R}$ (car invariante par Galois) et donc $(l, \sigma)$ est une sphère équatoriale.

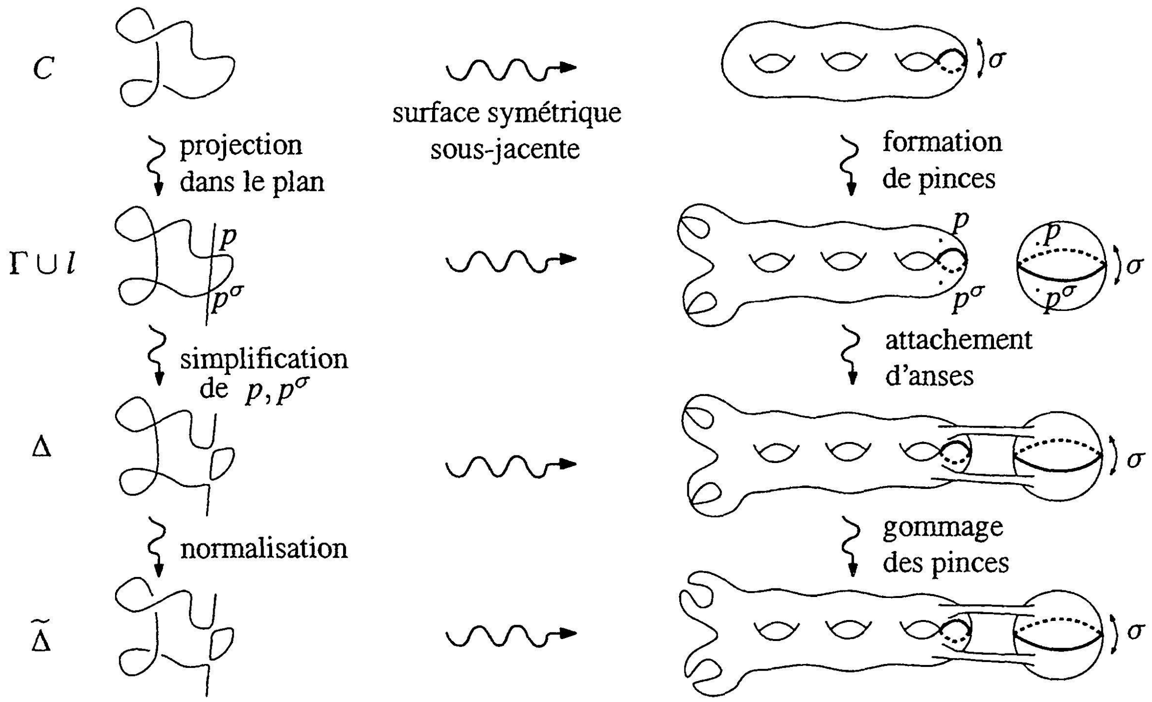


FIGURE 7

D'après Brusotti, on peut simplifier simultanément les points doubles $p$ et $p^\sigma$ sur la courbe réductible $\Gamma \cdot l = 0$. On obtient ainsi $\Delta$ une courbe réelle irréductible, dont la normalisée $\widetilde{\Delta}$ se déduit topologiquement de $C$ précisément en attachant une anse baguée en deux points symétriques (cf. Figure 7). □