

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN  
**Autor:** Gabard, Alexandre  
**Kapitel:** 4. Le théorème de Klein  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64798>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

• Si en outre la courbe  $\Gamma$  est réelle, alors la courbe simplifiée  $\Delta$  peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.

De plus chaque nœud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

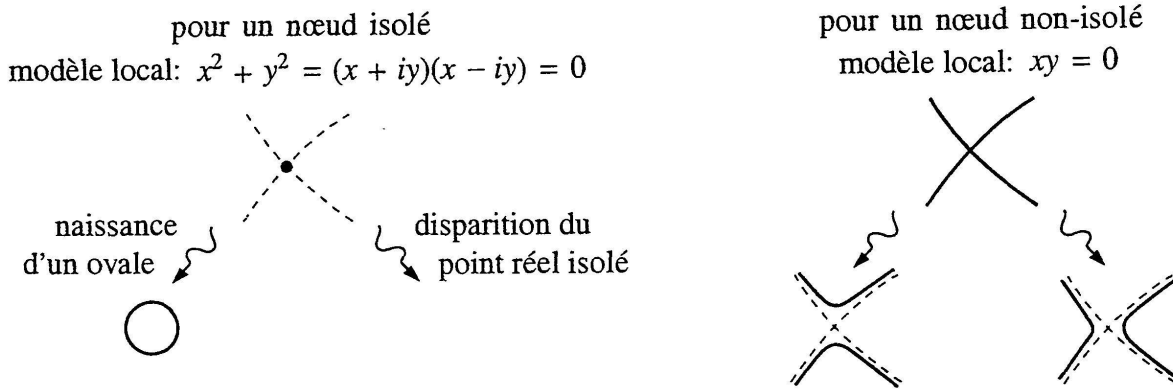


FIGURE 6

#### 4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

**THÉORÈME 4.1 (Klein 1882).** *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

*Preuve.* Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser «algèbro-géométriquement» l'opération d'attachement d'une anse baguée.

- Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles  $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$  où  $f(x)$  est un polynôme réel de degré  $2g + 2$  ayant des racines distinctes. La normalisée  $\tilde{\Gamma}$  de la courbe projective  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  associée à  $\Gamma_0$  est alors une courbe réelle de genre  $g$ .

1. Si  $f(x)$  est choisi tel que  $f(x) < 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , alors  $\Gamma_0(\mathbf{R})$  est vide et donc  $\tilde{\Gamma}(\mathbf{R})$  aussi. On obtient de la sorte (en considérant  $\tilde{\Gamma}$ ) pour tout  $g$  une

courbe non-séparante avec  $r = 0$ . Autrement dit pour toutes les valeurs du genre, il existe une courbe réelle sans point réel.

2. Si  $f(x)$  est choisi tel que  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , alors les fibres de la projection  $\pi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{A}^1$  sur l'axe des  $x$  au-dessus des points réels sont exclusivement formées de points réels. Il en résulte que  $\tilde{\Gamma}$  est séparante. La congruence de Klein entraîne alors que  $r \equiv g + 1 \pmod{2}$ . Mais la restriction de  $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}^1$  aux points réels induit un revêtement de degré 2 du cercle, et donc  $r(\tilde{\Gamma})$  vaut 1 ou 2. En particulier on voit que pour tout entier  $g$  pair, il existe (avec  $\tilde{\Gamma}$ ) une courbe séparante de genre  $g$  avec  $r = 1$ .

• L'opération topologique d'attachement d'une anse baguée admet la modélisation « algébro-géométrique » suivante :

Soient  $C$  une courbe réelle lisse et  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  un modèle  $\mathbf{R}$ -birationnel plan de  $C$  ayant au pire des singularités nodales. On choisit  $p \in \Gamma \setminus \Gamma(\mathbf{R})$  un point imaginaire lisse, de sorte que  $p$  admette un conjugué strict  $p^\sigma \neq p$ . On trace alors la « sécante galoisienne »  $l := \overline{pp^\sigma}$ , qui pour un choix générique de  $p$  sera transverse à  $\Gamma$ . Une telle droite est définie sur  $\mathbf{R}$  (car invariante par Galois) et donc  $(l, \sigma)$  est une sphère équatoriale.

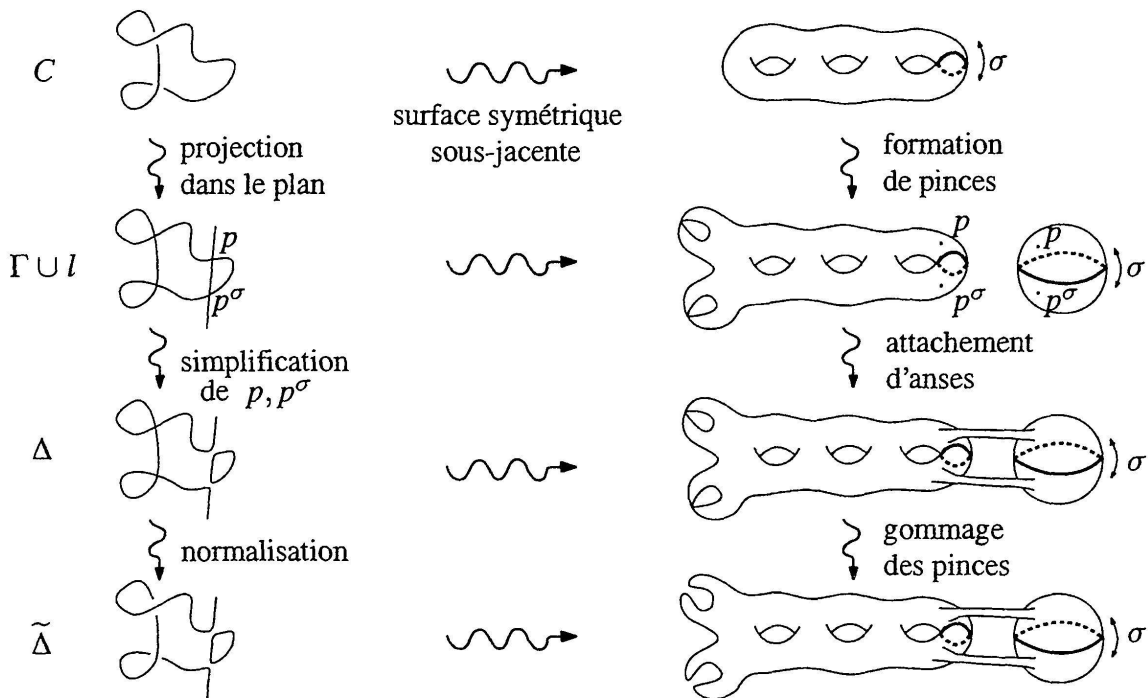


FIGURE 7

D'après Brusotti, on peut simplifier simultanément les points doubles  $p$  et  $p^\sigma$  sur la courbe réductible  $\Gamma \cdot l = 0$ . On obtient ainsi  $\Delta$  une courbe réelle irréductible, dont la normalisée  $\tilde{\Delta}$  se déduit topologiquement de  $C$  précisément en attachant une anse baguée en deux points symétriques (cf. Figure 7).  $\square$