

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN  
**Autor:** Gabard, Alexandre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64798>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

par Alexandre GABARD

**RÉSUMÉ.** On étudie la topologie des courbes algébriques réelles selon le *point de vue de Klein*, i.e. on s'intéresse au plongement de la partie réelle d'une courbe réelle dans sa complexifiée. Le résultat principal est une caractérisation des plongements possibles pour les courbes *planes*, obtenue en montrant qu'une restriction due à Rohlin est essentiellement la seule. Ce résultat répond à une question posée par Klein, puis par Gross et Harris.

### 1. INTRODUCTION

Une courbe algébrique projective complexe  $C \subset \mathbf{P}^n$  lisse et irréductible est (pour la topologie transcendante) une surface connexe compacte orientable. Si de plus  $C$  est *réelle* (i.e. définie par des équations à coefficients réels) alors la conjugaison complexe  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ , par le biais de son action sur  $\mathbf{P}^n$  coordonnée par coordonnée, préserve globalement le lieu complexe  $C$ , en fixant point par point l'ensemble des points réels que l'on notera  $C(\mathbf{R})$ .

A la courbe réelle  $C$  est donc associée une *surface symétrique*  $(X, \sigma)$ , c'est-à-dire une surface connexe compacte orientable  $X$  munie d'une involution continue  $\sigma$  qui *renverse l'orientation*.

Felix Klein disposait non seulement de la classification topologique des surfaces symétriques, mais savait aussi qu'elles sont toutes réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. Cela étant, Klein se demandait ce qu'il advient si l'on se restreint aux *courbes planes* (cf. [K3], p. 155, note en bas de page); de façon précise :

**PROBLÈME DE KLEIN.** *Caractériser les surfaces symétriques qui admettent un modèle comme l'action de Galois sur une courbe réelle lisse du plan.*

Ce problème fut reposé par Gross et Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Il revient à étudier les plongements possibles de  $C(\mathbf{R})$  dans une courbe plane  $C$  ; alors que le plongement de  $C(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est la spécificité du 16<sup>e</sup> *problème de Hilbert*. Ce dernier est ouvert pour les degrés  $d \geq 8$ , et l'objet du présent exposé est de résoudre le *problème de Klein* pour tous les degrés.

L'exposé s'organise de la façon suivante :

- On commence par rappeler la classification topologique des surfaces symétriques en termes de trois invariants : le genre, le nombre de composantes fixes et l'alternative *séparante* ou non (la définition sera donnée au paragraphe suivant). Ensuite on va exhiber une *opération* qui permet de construire récursivement toutes les surfaces symétriques.

- Cette façon dynamique de penser aux surfaces symétriques va nous permettre de redémontrer le théorème de Klein : simplement en effectuant une « déformation » de courbes algébriques qui modélise l'opération topologique susmentionnée. Pour ce faire, on invoquera un résultat de l'école italienne dû à Brusotti, qui stipule que l'on peut « défaire » de façon indépendante les nœuds d'une courbe plane dont les seules singularités sont nodales. Cette preuve du théorème de Klein nous semble présenter l'avantage d'éviter tout transit superflu par les surfaces de Riemann : on préfère travailler directement sur leurs manifestations projectives.

- C'est alors seulement qu'on s'intéressera à la famille particularisée des courbes *planes* lisses, et ce en rappelant certains travaux de Rohlin, desquels résulte (entre autres) une restriction qui dit grosso modo qu'une courbe plane séparante possède beaucoup de composantes.

- Ensuite, quelques variations autour d'une méthode classique de Hilbert (originellement conçue pour la construction de courbes Harnack-maximales) vont nous permettre de construire des courbes planes qui réalisent tous les invariants non prohibés par Rohlin, obtenant ainsi une solution complète au problème de Klein.

## 2. LA CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SURFACES SYMÉTRIQUES

On va d'abord classer les surfaces symétriques  $(X, \sigma)$  à *homéomorphisme équivariant* près (c'est la relation naturelle vu qu'un morphisme défini sur  $\mathbf{R}$  entre variétés algébriques réelles est équivariant pour les actions de Galois). On note  $g$  le genre de  $X$  et  $r$  le nombre de composantes de  $\text{Fix}(\sigma)$ , l'ensemble des points de  $X$  fixes par  $\sigma$ .

Comme  $\sigma$  renverse l'orientation, son action se linéarise au voisinage d'un point  $p \in \text{Fix}(\sigma)$  en une symétrie par rapport à une droite. Il en résulte que  $\text{Fix}(\sigma)$  est une sous-variété compacte de  $X$  de dimension 1 (et donc une réunion disjointe de cercles) et que le quotient par l'involution  $Y = X/\sigma$  est une *surface connexe à bord*, dont le bord s'identifie à  $\text{Fix}(\sigma)$ . (Le terme «surface à bord» est à comprendre ici au sens large: on autorise le bord à être vide, car il se peut très bien que  $\sigma$  soit sans point fixe).

Inversement une surface à bord  $Y$  détermine une surface symétrique en prenant son revêtement des orientations, d'où un dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord.

De plus en relevant sur  $X$  une triangulation du quotient  $Y$ , on voit que  $\chi(X) = 2\chi(Y)$ , car la projection  $X \rightarrow Y$  est «plissée» le long des cercles invariants de caractéristique d'Euler nulle.

**LEMME 2.1.** *La surface privée des cercles invariants  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  a au plus deux composantes connexes, et si elle en a deux elles sont échangées par  $\sigma$ .*

*Preuve.* Il suffit d'observer que la base du revêtement à 2 feuilles  $X \setminus \text{Fix}(\sigma) \rightarrow Y \setminus \partial Y$  est connexe, ce qui résulte du fait qu'une surface connexe à bord privée de son bord reste connexe.  $\square$

**PROPOSITION 2.2 (Borne de Harnack).** *Soit  $(X, \sigma)$  une surface symétrique, alors  $r \leq g + 1$ .*

*Preuve.* L'argument suivant est de Klein (cf. [K1], p.72). Par le lemme précédent, la surface  $X$  privée de tous les cercles invariants sauf un est encore connexe. Ainsi si  $r > g + 1$ , on pourrait effectuer  $g + 1$  coupures sur  $X$  sans la disconnecter, ce qui contredit la *définition de Riemann du genre* comme étant le nombre maximal de coupures non disconnectantes.  $\square$

Observer qu'un miroir sur une «somme connexe rectiligne» de  $g$  tores fournit une surface symétrique réalisant la borne de Harnack (Figure 1).

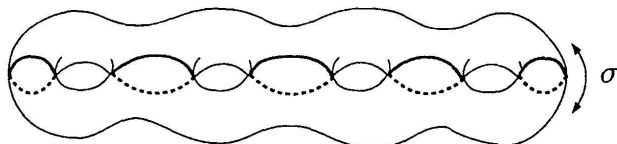


FIGURE 1

DÉFINITION (Klein). Une surface symétrique  $(X, \sigma)$  est *séparante* ( $a = 0$ ) si  $\text{Fix}(\sigma)$  disconnecte  $X$ , et *non-séparante* ( $a = 1$ ) sinon.

Notons qu'une surface symétrique avec  $r = g + 1$  cercles invariants, est nécessairement séparante. C'est immédiat avec la définition de Riemann du genre.

Observons aussi qu'une surface symétrique  $(X, \sigma)$  est séparante si et seulement si le quotient  $Y = X/\sigma$  est orientable. En effet dans le cas séparant, le quotient s'identifie à l'adhérence d'une des moitiés, et est donc orientable car plongé dans  $X$ . La réciproque est claire si on raisonne avec le revêtement des orientations.

PROPOSITION 2.3 (Congruence de Klein). *Si  $(X, \sigma)$  est séparante, alors  $r \equiv g + 1 \pmod{2}$ .*

*Preuve.* Le quotient  $Y$  est orientable et possède  $r$  composantes de bord, il est donc le résultat de l'excision de  $r$  disques ouverts disjoints dans une surface orientable sans bord de genre disons  $n \geq 0$ ; par suite  $\chi(Y) = (2 - 2n) - r$ . Or  $\chi(X) = 2 - 2g$ , et la relation  $\chi(X) = 2\chi(Y)$  donne  $1 - g = 2 - 2n - r$ , d'où  $r = g + 1 - 2n \equiv g + 1 \pmod{2}$ .  $\square$

En se servant du dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord, et en se souvenant que ces dernières sont classées par 3 invariants qui sont la caractéristique d'Euler, le nombre de composantes de bord et l'orientabilité, on obtient le :

THÉORÈME 2.4 (Klein-Weichold). *Deux surfaces symétriques sont équi-homéomorphes si et seulement si elles ont mêmes invariants  $(g, r, a)$ .*

Nous allons montrer par des exemples que les restrictions recensées jusqu'ici sur les invariants  $(g, r, a)$  sont les seules. Pour l'instant leurs valeurs admissibles sont résumées par le *diagramme des involutions* (cf. Figure 2), qui pour une valeur fixée du genre comporte 2 «étages» : le premier correspond aux surfaces séparantes ( $a = 0$ ) et le second aux non-séparantes ( $a = 1$ ).

La combinatoire de ce diagramme (Figure 2) montre que l'opération numérique  $(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$  fournit un mode de génération exhaustif des surfaces symétriques à partir des modèles minimaux symbolisés par des «pastilles noires» sur la Figure 2.

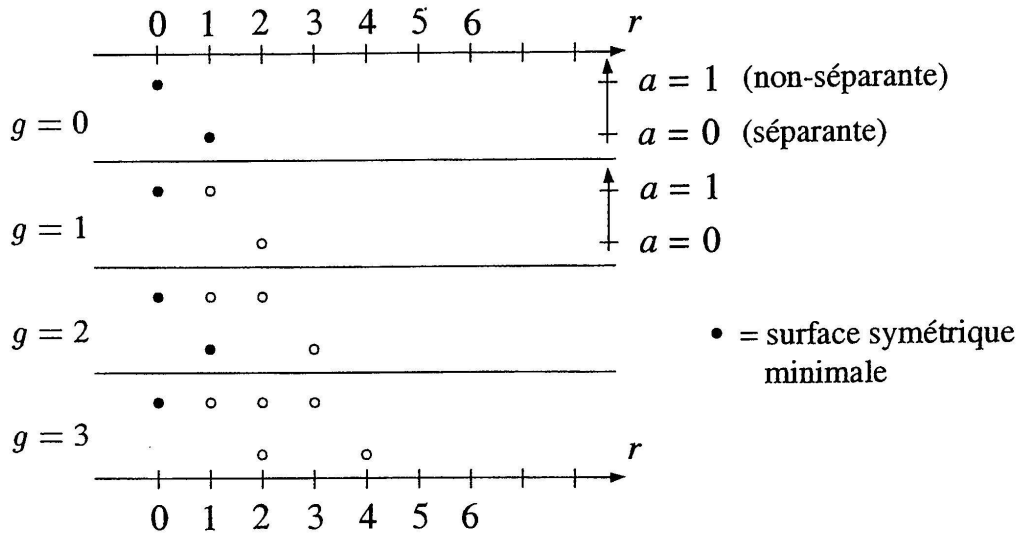


FIGURE 2

Cette opération n'est autre que l'attachement d'une anse baguée, dont voici la description : Soit  $(X, \sigma)$  une surface symétrique d'invariants  $(g, r, a)$ . On lui attache une anse baguée basée en deux points symétriques distincts  $p$  et  $p^\sigma$  de la surface (cf. Figure 3). On peut alors prolonger à l'anse l'involution donnée sur  $X$  en fixant exactement la bague, d'où une nouvelle surface symétrique d'invariants  $(g+1, r+1, a)$ . Noter que cette opération préserve bien l'invariant  $a$ , car elle revient à faire un trou (= exciser un disque ouvert) dans le quotient, ce qui préserve l'orientabilité.

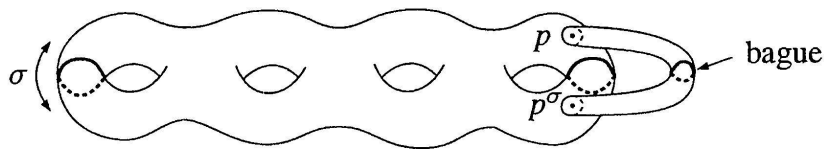


FIGURE 3

Les surfaces symétriques minimales relativement à cette opération sont :

1. Les non-séparantes, avec  $r = 0$ , qui s'obtiennent à partir de la *sphère antipodale* et du *tore antipodal* en leur attachant récursivement une « paire d'oreilles » (cf. Figure 4). En particulier on voit que, pour toutes les valeurs du genre, il existe une surface symétrique sans point fixe.

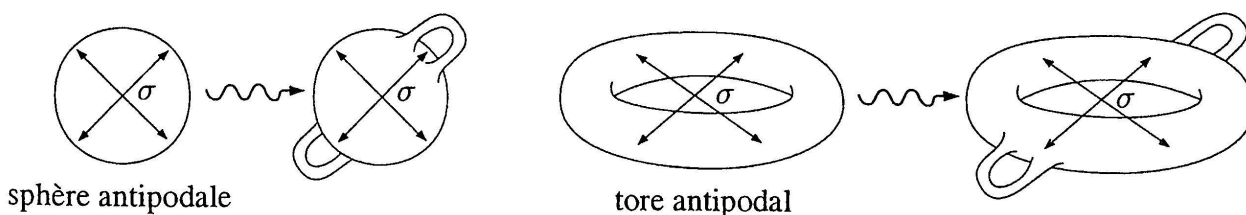


FIGURE 4

2. Les séparantes, avec  $r = 1$  et donc  $g \equiv 0 \pmod{2}$ , se déduisent de la *sphère équatoriale* en lui attachant récursivement une paire d'oreilles (cf. Figure 5).

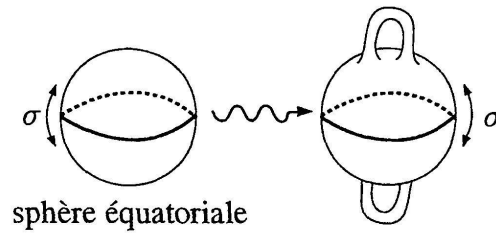


FIGURE 5

### 3. LES PETITES DÉFORMATIONS DES COURBES PLANES NODALES

Notre outil principal est le *théorème de Brusotti* sur l'indépendance de la simplification des nœuds (= points doubles ordinaires) des courbes planes (cf. [Br] ou [BR], pp. 269–275). On va en faire un double usage.

- D'abord pour faire du plan  $\mathbf{P}^2$  l'habitable de « déformations » explicites de courbes algébriques réelles, permettant en particulier de modéliser l'opération clé  $(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$  pour la génération des surfaces symétriques, et d'obtenir ainsi une preuve « purement projective » du théorème de Klein relatif aux courbes « abstraites ».

- Et ensuite comme outil de *construction de courbes réelles lisses dans le plan*: la méthode consiste à se donner deux courbes réelles transverses de petits degrés (typiquement des droites et des coniques) dont la topologie est bien comprise, puis de « lissifier » la réunion de leurs parties réelles; le théorème de Brusotti assure alors l'existence d'une courbe algébrique réelle lisse dont la partie réelle réalise les lissifications prescrites. Cette remarquable flexibilité graphique des courbes planes réelles nodales (qui est essentiellement une conséquence du théorème de Riemann-Roch) va jouer un rôle crucial dans la partie constructive du problème de Klein.

THÉORÈME 3.1 (Brusotti 1921). • Soit  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  une courbe plane de degré  $d$  (non nécessairement irréductible) dont les seules singularités sont des nœuds  $p_1, \dots, p_\delta$ . Alors pour tout choix de points doubles  $S \subset \{p_1, \dots, p_\delta\}$ , il existe une courbe plane  $\Delta$  de même degré  $d$  voisine de  $\Gamma$  qui simplifie les nœuds prescrits  $S$  et conserve les nœuds restants (modulo mouvements infinitésimaux).

• Si en outre la courbe  $\Gamma$  est réelle, alors la courbe simplifiée  $\Delta$  peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.

De plus chaque nœud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

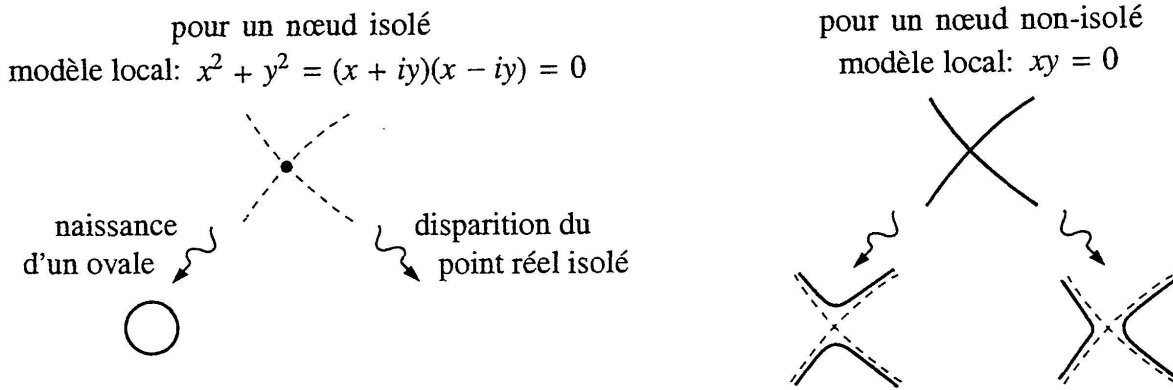


FIGURE 6

#### 4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

**THÉORÈME 4.1 (Klein 1882).** *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

*Preuve.* Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser « algèbro-géométriquement » l'opération d'attachement d'une anse bagueée.

- Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles  $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$  où  $f(x)$  est un polynôme réel de degré  $2g + 2$  ayant des racines distinctes. La normalisée  $\tilde{\Gamma}$  de la courbe projective  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  associée à  $\Gamma_0$  est alors une courbe réelle de genre  $g$ .

1. Si  $f(x)$  est choisi tel que  $f(x) < 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , alors  $\Gamma_0(\mathbf{R})$  est vide et donc  $\tilde{\Gamma}(\mathbf{R})$  aussi. On obtient de la sorte (en considérant  $\tilde{\Gamma}$ ) pour tout  $g$  une

courbe non-séparante avec  $r = 0$ . Autrement dit pour toutes les valeurs du genre, il existe une courbe réelle sans point réel.

2. Si  $f(x)$  est choisi tel que  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , alors les fibres de la projection  $\pi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbf{A}^1$  sur l'axe des  $x$  au-dessus des points réels sont exclusivement formées de points réels. Il en résulte que  $\tilde{\Gamma}$  est séparante. La congruence de Klein entraîne alors que  $r \equiv g + 1 \pmod{2}$ . Mais la restriction de  $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{P}^1$  aux points réels induit un revêtement de degré 2 du cercle, et donc  $r(\tilde{\Gamma})$  vaut 1 ou 2. En particulier on voit que pour tout entier  $g$  pair, il existe (avec  $\tilde{\Gamma}$ ) une courbe séparante de genre  $g$  avec  $r = 1$ .

• L'opération topologique d'attachement d'une anse baguée admet la modélisation « algébro-géométrique » suivante :

Soient  $C$  une courbe réelle lisse et  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  un modèle  $\mathbf{R}$ -birationnel plan de  $C$  ayant au pire des singularités nodales. On choisit  $p \in \Gamma \setminus \Gamma(\mathbf{R})$  un point imaginaire lisse, de sorte que  $p$  admette un conjugué strict  $p^\sigma \neq p$ . On trace alors la « sécante galoisienne »  $l := \overline{pp^\sigma}$ , qui pour un choix générique de  $p$  sera transverse à  $\Gamma$ . Une telle droite est définie sur  $\mathbf{R}$  (car invariante par Galois) et donc  $(l, \sigma)$  est une sphère équatoriale.

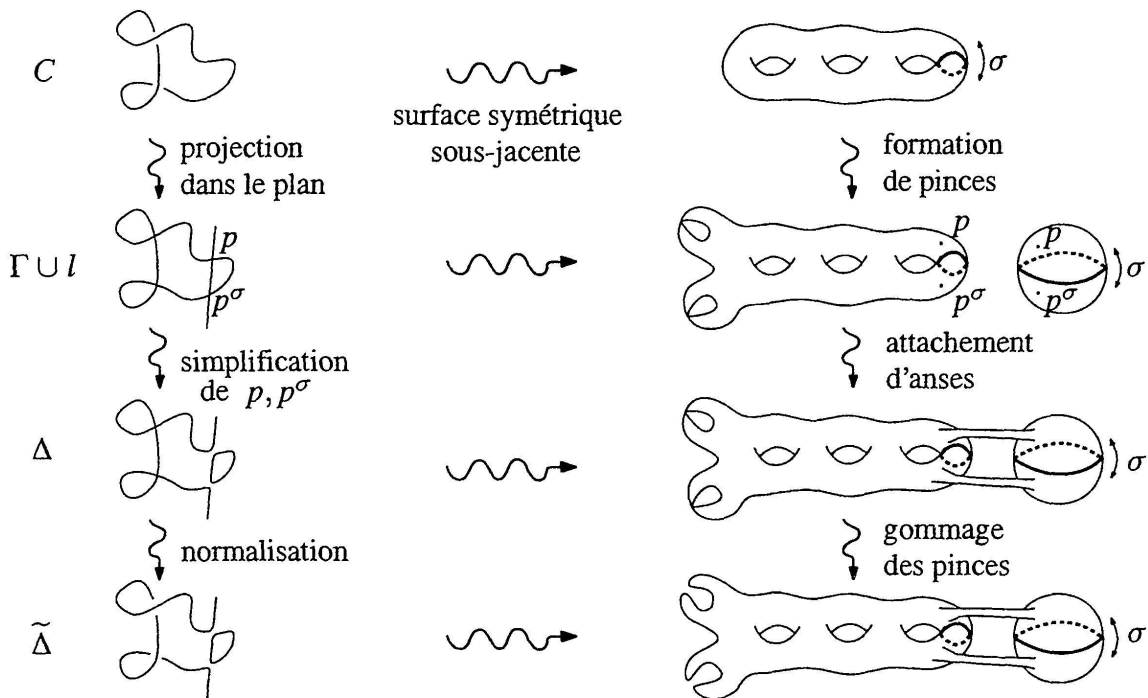


FIGURE 7

D'après Brusotti, on peut simplifier simultanément les points doubles  $p$  et  $p^\sigma$  sur la courbe réductible  $\Gamma \cdot l = 0$ . On obtient ainsi  $\Delta$  une courbe réelle irréductible, dont la normalisée  $\tilde{\Delta}$  se déduit topologiquement de  $C$  précisément en attachant une anse baguée en deux points symétriques (cf. Figure 7).  $\square$

## 5. LE PROBLÈME DE KLEIN : DESCRIPTION DES PROHIBITIONS

Pour une courbe *plane* lisse  $C \subset \mathbf{P}^2$ , le genre est  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , où  $d$  désigne le degré de la courbe  $C$ . On va donc se restreindre aux genres de cette forme, et il devient maintenant commode de substituer aux invariants  $(g, r, a)$  les invariants  $(d, r, a)$ .

Pour les degrés  $d$  impairs, une courbe plane réelle a toujours des points réels; si bien qu'il est impossible de réaliser la surface symétrique sans point fixe. Je me référerai à cette restriction sous le terme de *restriction de Galois*.

Ensuite comme conséquence des travaux de Klein sur le dénombrement des caractéristiques-theta réelles impaires (cf. [K2]), Gross et Harris ont mis en évidence une restriction plus subtile: si  $d \equiv 5 \pmod{8}$  (auquel cas  $g \equiv 0 \pmod{2}$ ), alors il n'existe pas de courbe plane séparante avec  $r = 1$  (cf. [GrHa], Prop. 7.1, p. 173). Noter pourtant qu'une telle surface symétrique existe abstraitement puisque  $g$  est pair (cf. Figure 8). Ainsi déjà en degré 5, les courbes planes présentent des lacunes vis-à-vis des invariants  $(d, r, a)$ : impossibilité de fabriquer une quintique (plane réelle lisse) séparante n'ayant qu'une composante.

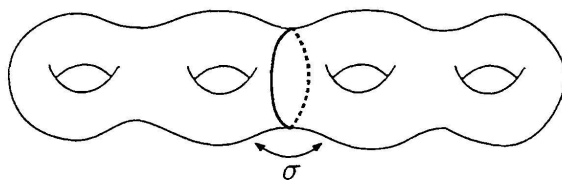


FIGURE 8

En fait on a une restriction beaucoup plus forte due à Rohlin (cf. [Ma], p. 59):

**THÉORÈME 5.1** (Inégalité de Rohlin). *Si  $C$  est une courbe plane réelle lisse séparante de degré  $d$ , alors  $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ .*

*Preuve.* Etant donné une courbe séparante  $C$ , Rohlin observe que la partie réelle  $C(\mathbf{R})$  admet deux orientations de signes opposés comme bord des moitiés de  $C \setminus C(\mathbf{R})$  et parle d'*orientations complexes*. En supposant maintenant la courbe plane, il compare pour chaque paire d'ovales emboîtés, les orientations complexes de ses deux ovales à celles comme bord des orientations de l'anneau délimité par la paire dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ . Lorsque ces orientations coïncident il parle d'une *paire positive*, et dans le cas contraire d'une *paire négative*, et note  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  leur nombre respectif. En calculant l'intersection dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  des deux

moitiés (rebouchées par les adhérences des intérieurs des ovals) il obtient la formule :

$$(1) \quad 2(\Pi^+ - \Pi^-) = r - k^2$$

où  $k = \frac{d}{2}$  et où l'on suppose le degré  $d$  pair (le cas des degrés impairs nécessite une discussion parallèle effectuée par Mishachev [Mi]). Pour plus de détails on renvoie à [R1], où la formule (1) est démontrée dans le cas particulier des courbes Harnack-maximales (aussi appelées *M-courbes*), et pour l'énoncé général, on consultera [R2], p. 91.

Ensuite il est purement formel à partir de la *formule de Rohlin* (1) de déduire l'inégalité de Rohlin. En effet, si  $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$  désigne le nombre total de paires d'ovales emboîtés, on a  $\Pi \leq \binom{r}{2}$ , et alors d'après (1) :

$$r = k^2 + 2(\Pi^+ - \Pi^-) \geq k^2 - 2\Pi^- \geq k^2 - 2\Pi \geq k^2 - 2\binom{r}{2} = k^2 - r(r-1).$$

En se concentrant sur les membres extrêmes, on en tire  $r^2 \geq k^2$ , et donc  $r \geq k$ . Ce qui est précisément l'inégalité de Rohlin pour  $d$  pair. On laisse au soin du lecteur, la tâche analogue pour les degrés impairs en utilisant cette fois la formule de Mishachev (cf. [R2], p. 91).  $\square$

La suite de l'exposé est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui résout complètement le problème de Klein :

**THÉORÈME 5.2.** *Les restrictions de Galois (si  $d \equiv 1 \pmod{2}$  alors  $r \geq 1$ ) et de Rohlin (si  $a = 0$  alors  $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ ) sont les seules contraintes sur les invariants  $(d, r, a)$  de Klein pour les courbes algébriques planes réelles lisses.*

## 6. LA GÉNÉTIQUE CHEZ LES COURBES PLANES RÉELLES

Avant de construire des courbes, notre problème exige une compréhension du comportement de l'invariant  $a$  lorsque l'on «accouple» deux courbes planes réelles lisses transverses en simplifiant tous leurs points d'intersection à la Brusotti. A ce sujet, on a le résultat suivant dû à Fiedler (cf. [Fi], pp. 7-9) :

**THÉORÈME** (Fiedler 1978). Soient  $C_1, C_2$  deux courbes planes de degrés respectifs  $d_1, d_2$  réelles, lisses et transverses, et  $C$  une courbe réelle lisse de degré  $d = d_1 + d_2$  voisine de  $C_1 \cdot C_2 = 0$  qui simplifie (de façon non-précisée pour l'instant) tous les points doubles de  $C_1 \cdot C_2 = 0$ .

- Il suffit qu'une des deux courbes  $C_1$  ou  $C_2$  soit non-séparante, pour que la courbe  $C$  le soit, et ce indépendamment des simplifications effectuées. Autrement dit en termes génétiques, « non-séparant » est un caractère dominant.

- Si par contre les courbes  $C_1$  et  $C_2$  sont de caractères récessifs, c'est-à-dire séparantes, et si en outre tous les  $d_1 \cdot d_2$  points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$  sont réels (cette condition pourra être satisfaite dans les constructions à venir) alors, d'après Brusotti, la courbe  $C_1 \cdot C_2 = 0$  peut être simplifiée de  $2^{d_1 \cdot d_2}$  façons distinctes, mais parmi tous ces choix de simplifications, exactement deux livrent des courbes séparantes, à savoir celui qui est toujours positif, respectivement toujours négatif, relativement à des orientations complexes fixées de  $C_1$  et  $C_2$ . De plus pour un tel choix de simplifications dicté par les orientations complexes, l'orientation complexe de la courbe simplifiée  $C$  se déduit par transfert de celle de l'un de ses deux parents.

*Preuve.* Seule la seconde assertion nécessite une explication. La simplification de chaque nœud de  $C_1 \cdot C_2 = 0$  (qui sont tous réels et non-isolés) revient à attacher une anse contenant deux brins réels sur l'union disjointe de  $C_1$  avec  $C_2$ . Cette anse privée des brins réels relie une moitié de  $C_1$  avec une moitié de  $C_2$  (ainsi que les moitiés conjuguées correspondantes). Ainsi pour que la courbe simplifiée  $C$  soit séparante, il faut (et il suffit) que toutes les simplifications effectuées correspondent à des attachements d'anses reliant systématiquement les mêmes moitiés. Ainsi notre seule liberté, si on aspire à fabriquer une courbe  $C$  séparante, réside dans le choix des deux moitiés que l'on relie initialement, et il est clair que l'on dispose de deux tels choix.  $\square$

## 7. LE PROBLÈME DE KLEIN : CONSTRUCTION DE COURBES

On va commencer par traiter le cas des degrés pairs, le cas des degrés impairs admettra ensuite un traitement similaire. Les constructions qu'on va entreprendre se décomposent en les étapes suivantes :

**Étape 0.** On commence par s'entraîner avec les petits degrés  $d = 2, 4$ .

**Étape 1.** On rappelle la méthode de Hilbert de construction de courbes Harnack-maximales.

**Étape 2.** Ensuite en vertu de Brusotti, on va explorer d'autres choix de simplifications qui vont livrer des *courbes non-séparantes* avec moins d'ovales.

**Étape 3.** On disposera alors déjà d'un système d'invariants permettant d'attraper toutes les non-séparantes, via une opération simple qui consiste à rajouter une *petite conique*.

**Étape 4.** A ce stade, il nous restera à réaliser les *courbes séparantes* non prohibées par Rohlin, qui s'obtiendront en exploitant les 2 choix de simplifications compatibles avec les orientations complexes.

**Étape 5.** Enfin, en répertoriant les invariants ainsi réalisés, on constatera qu'il nous manque encore quelques invariants non prohibés par Rohlin, que l'on attrapera cependant par de petites constructions « ad hoc ».

### 7.1 LES COURBES DE DEGRÉ PAIR

**Étape 0.** • Pour  $d = 2$  on a  $g = 0$ , et il n'y a alors que deux surfaces symétriques qui sont la sphère équatoriale et antipodale, respectivement réalisées par  $x^2 + y^2 = 1$  et  $x^2 + y^2 = -1$ .

Observer plus généralement que  $x^d + y^d = -1$  livre les invariants  $(d, r = 0, 1)$  pour tout  $d$  pair.

• Pour  $d = 4$ , on considère une paire de coniques réelles  $C_2 \cup E_2 \subset \mathbf{P}^2$  s'intersectant en 4 points réels, que l'on peut déformer en les quartiques réelles lisses de la Figure 9. D'après Fiedler la première et la dernière de ces courbes (que Klein appelait la *Gürtelkurve*) sont séparantes (les simplifications effectuées étant compatibles avec les orientations complexes) et toutes les autres sont non-séparantes.

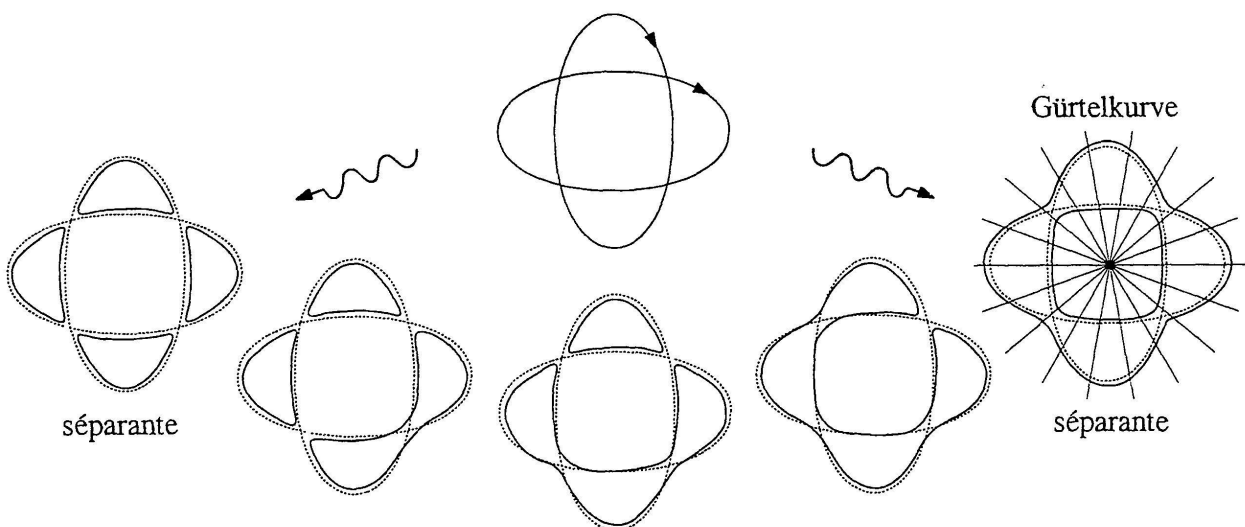


FIGURE 9

En se souvenant des 6 surfaces symétriques de genre  $g = 3$  (cf. Figure 2), on observe que pour  $d = 4$  il n'y a pas de restrictions aux invariants de Klein.

REMARQUE. Un argument plus synthétique pour révéler le caractère séparant de la Gürtelkurve, consiste à regarder le pinceau des droites passant par un point  $p$  réel choisi le plus à l'intérieur du nid (cf. Figure 9). Ce pinceau jouit de la propriété remarquable que tous ses membres réels (qui sont des droites réelles par  $p$ ) découpent sur  $C_4$  exclusivement des points réels. Le morphisme correspondant  $C_4 \rightarrow \mathbf{P}^1$  est donc saturé, i.e. ses fibres au-dessus des points réels sont toutes exclusivement formées de points réels. Par suite, il envoie les points imaginaires de  $C_4$  sur des points imaginaires du pinceau qui s'identifie à une sphère équatoriale. Cette dernière étant séparante, il en résulte que  $C_4$  l'est aussi.

Ce même argument montre plus généralement que la borne inférieure de Rohlin est toujours réalisée, i.e. pour tout degré  $d$  il existe une courbe plane réelle lisse séparante avec  $r = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  composantes. En effet, en perturbant un peu une réunion de  $k$  cercles concentriques, on peut obtenir une courbe  $C_d$  lisse de degré pair  $d = 2k$  avec  $r = k$  composantes. Une telle courbe est séparante (il suffit comme plus haut de considérer le pinceau des droites par un point choisi le plus à l'intérieur du nid). Pour les degrés impairs, il suffit de rajouter à la configuration précédente une droite réelle «à l'infini» (et de lissifier le tout).

*Étape 1.* Rappelons maintenant la *méthode de Hilbert* de construction de  $M$ -courbes (cf. [Gu], p.20) qui s'effectue séparément suivant la parité du degré.

Considérons deux coniques réelles  $C_2$  et  $E_2$  s'intersectant en 4 points réels  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , et  $C_4^0$  une quartique voisine avec  $r = 4$ . Soit  $\vartheta_4 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4$  une quartique réunion de 4 droites réelles intersectant chacune l'arc de  $E_2(\mathbf{R})$  délimité par  $p_1$  et  $p_2$  en 2 points (cf. Figure 10), et considérons alors  $C_4 := C_4^0 + \varepsilon \vartheta_4 = 0$  où  $\varepsilon$  désigne un petit nombre réel.

Cette petite perturbation a pour effet de faire «vibrer» un des ovals de notre quartique  $C_4^0$  relativement à la conique  $E_2$  (cf. Figure 10). On applique ensuite Brusotti à la courbe  $C_4 \cdot E_2 = 0$  et le choix de simplifications de la Figure 10 fournit une courbe lisse  $C_6$  qui possède  $r = 4 + (3 + 4) = 11$  ovals, ce qui est la borne de Harnack pour  $d = 6$ .

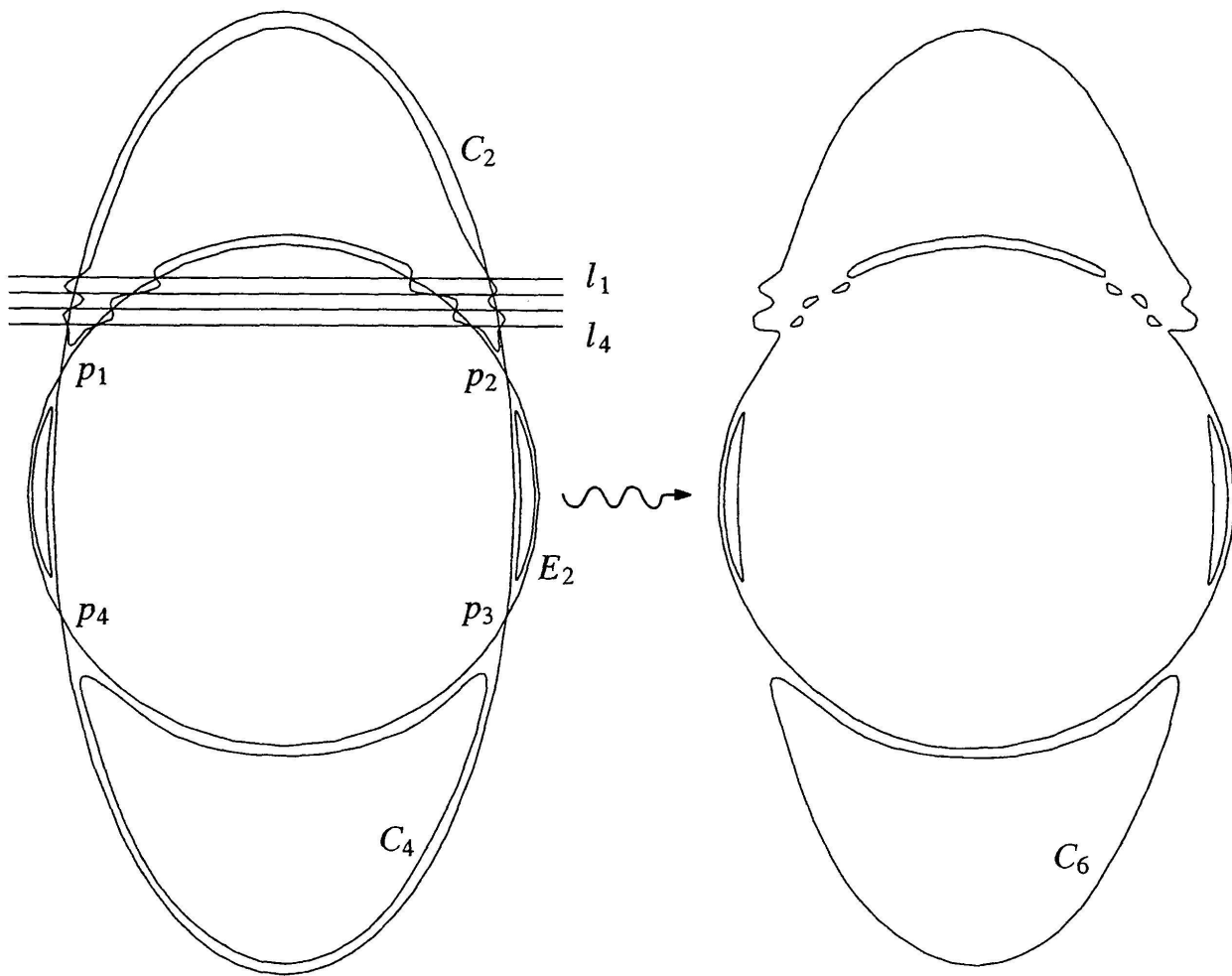


FIGURE 10

La méthode de Hilbert peut se schématiser par le dessin de la Figure 11, et en exploitant les 2 choix de simplifications de  $C_4 \cdot E_2 = 0$  compatibles avec des orientations complexes on obtient deux courbes séparantes avec  $r = 4 + (3 + 4) = 11$  et  $r = 4 + 1 = 5$  respectivement (cf. Figure 11).

REMARQUE. Noter ici qu'il n'est même pas nécessaire de connaître explicitement l'orientation complexe de  $C_4$ , vu que l'intersection  $C_4 \cap E_2$  est monopolisée par un seul ovale de  $C_4$ . Il suffit d'orienter (arbitrairement) les ovales de  $C_4(\mathbf{R})$  et de  $E_2(\mathbf{R})$  se rencontrant, et ces orientations locales (i.e. d'un ovale sur chaque courbe) se prolongeront univoquement en des orientations complexes des ovales restants, mais qu'il est inutile d'expliciter vu qu'elles n'influenceront pas le choix de simplifications.

*Étape 2.* L'observation importante est maintenant qu'en faisant varier le choix des simplifications de la courbe  $C_4 \cdot E_2 = 0$  de la Figure 11 (ce qui est loisible d'après Brusotti), on peut aussi obtenir les courbes de la Figure 12, qui

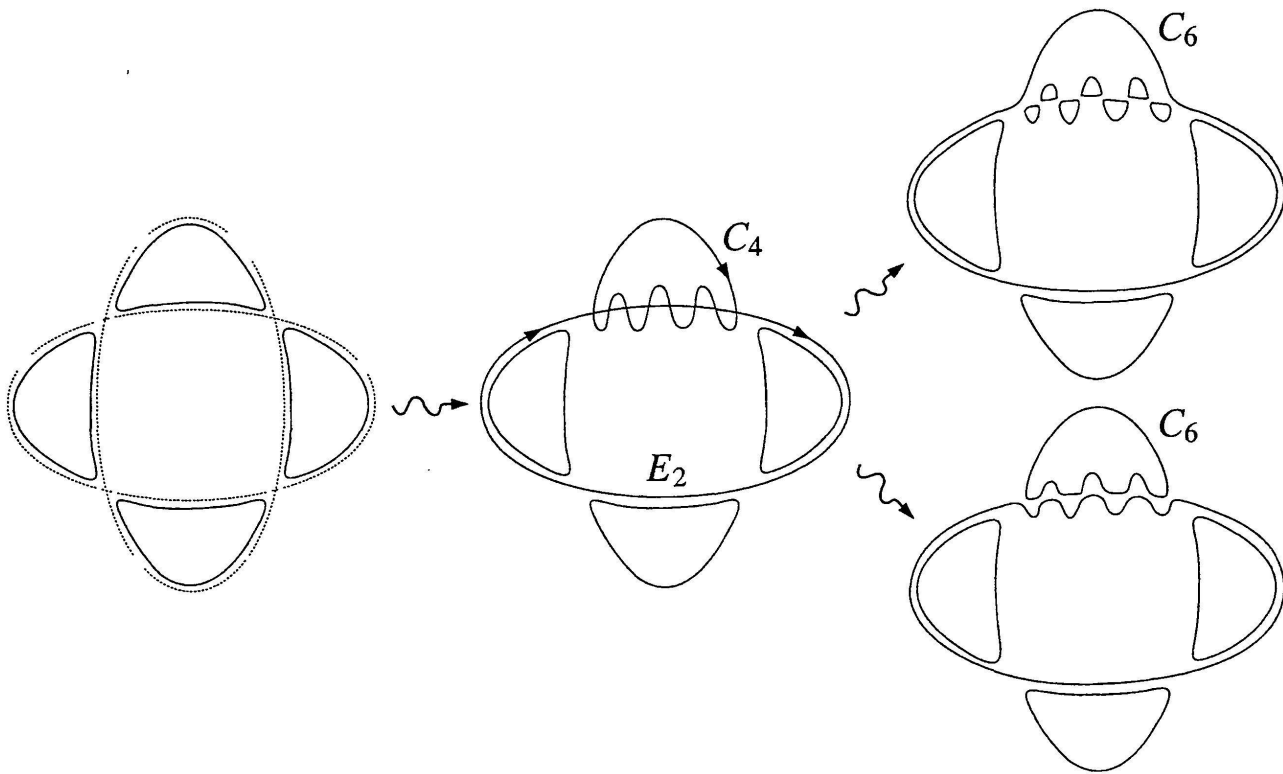


FIGURE 11

sont toutes non-séparantes (les deux choix séparants ayant déjà été exploités).

Observer que l'invariant  $r$  diminue successivement d'une unité  $r = 10, 9, \dots, 4$  jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré pair précédent. Je parle de *grignotage d'ovales dans une M-courbe de Hilbert*.

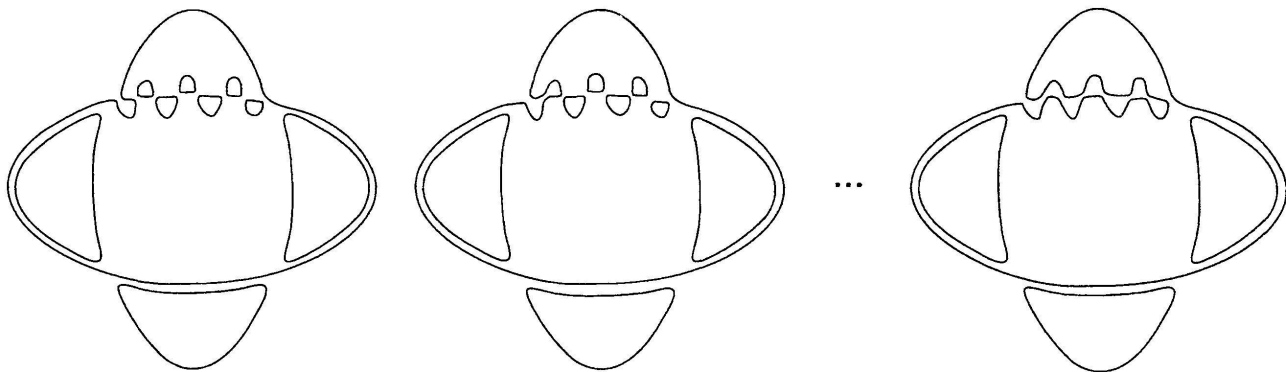


FIGURE 12

On itère ensuite la construction de Hilbert en faisant vibrer un ovale de la  $M$ -courbe  $C_6$  de la Figure 11, ce qui fournit une nouvelle courbe  $C_6$  de degré 6 qui oscille à travers  $E_2$  au voisinage de l'ovale excité (cf. Figure 13). Ensuite en simplifiant les points doubles de  $C_6 \cdot E_2 = 0$ , on peut obtenir la courbe  $C_8$  de degré 8 de la Figure 13, qui possède  $r = 11 + (5 + 6) = 22$  ovales.



**Étape 3.** Ensuite étant donné une courbe non-séparante  $C_d$ , on peut toujours lui rajouter une *petite conique*  $C_2$ , c'est-à-dire une conique réelle, ayant des points réels, mais de partie réelle disjointe de celle de  $C_d$  et (de complexifiée) transverse à  $C_d$ . La courbe  $C_d \cdot C_2 = 0$  possède alors  $2d$  nœuds imaginaires conjugués dont la simplification fournit une courbe  $C_{d+2}$  non-séparante (« non-séparant » étant un caractère dominant) et qui possède un ovale de plus que la courbe donnée, i.e.  $r(C_{d+2}) = r(C_d) + 1$ . On baptise cette opération le *collage d'une petite conique*.

REMARQUE. Pour fabriquer une telle petite conique, il suffit de choisir un point  $p$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  n'appartenant pas à  $C_d(\mathbf{R})$  et de perturber un peu le produit d'une droite imaginaire  $l$  passant par  $p$  et transverse à  $C_d$  avec sa droite conjuguée  $l^\sigma$  de sorte que le point réel isolé  $p$  de la conique dégénérée  $l \cdot l^\sigma = 0$  se transforme en un petit ovale autour de  $p$ . On peut déjà observer que cette opération s'appliquera également lorsque  $d$  sera impair.

Ainsi il est aisé (au niveau des courbes non-séparantes) de réaliser l'opération  $(d, r, 1) \mapsto (d+2, r+1, 1)$ . D'autre part, comme les non-séparantes avec  $r = 0$  s'obtiennent en considérant l'équation  $x^d + y^d = -1$ , on constate avec satisfaction en contemplant le diagramme des involutions (cf. Figure 14), que l'on dispose déjà d'un système de courbes non-séparantes permettant, moyennant itération successive de l'opération de collage d'une petite conique, d'attraper toutes les courbes non-séparantes restantes. Ceci montre qu'en degré pair tous les invariants des courbes non-séparantes sont réalisables dans le plan.

**Étape 4.** A ce stade il ne nous reste plus qu'à construire les courbes séparantes non prohibées par Rohlin, i.e. avec  $r$  tel que :

$$\frac{d}{2} \leq r \leq g(d) + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad r \equiv g(d) + 1 \pmod{2}.$$

L'idée pour attraper d'autres valeurs intermédiaires de  $r$  consiste à appliquer la même technique de vibration d'un ovale, mais cette fois à une courbe séparante non nécessairement Harnack-maximale.

Explicitement, au lieu de démarrer avec une  $M$ -courbe de degré 4, on considère la quartique  $C_4$  de la Figure 15 avec  $(d, r, a) = (4, 2, 0)$ . On peut faire vibrer un ovale de  $C_4$  relativement à  $E_2$  (cf. Figure 15), et les 2 choix de simplifications de  $C_4 \cdot E_2 = 0$  compatibles avec des orientations complexes livrent des courbes séparantes avec  $r = 2 + (3 + 4) = 9$  et  $r = 2 + 1 = 3$  respectivement (cf. Figure 15).

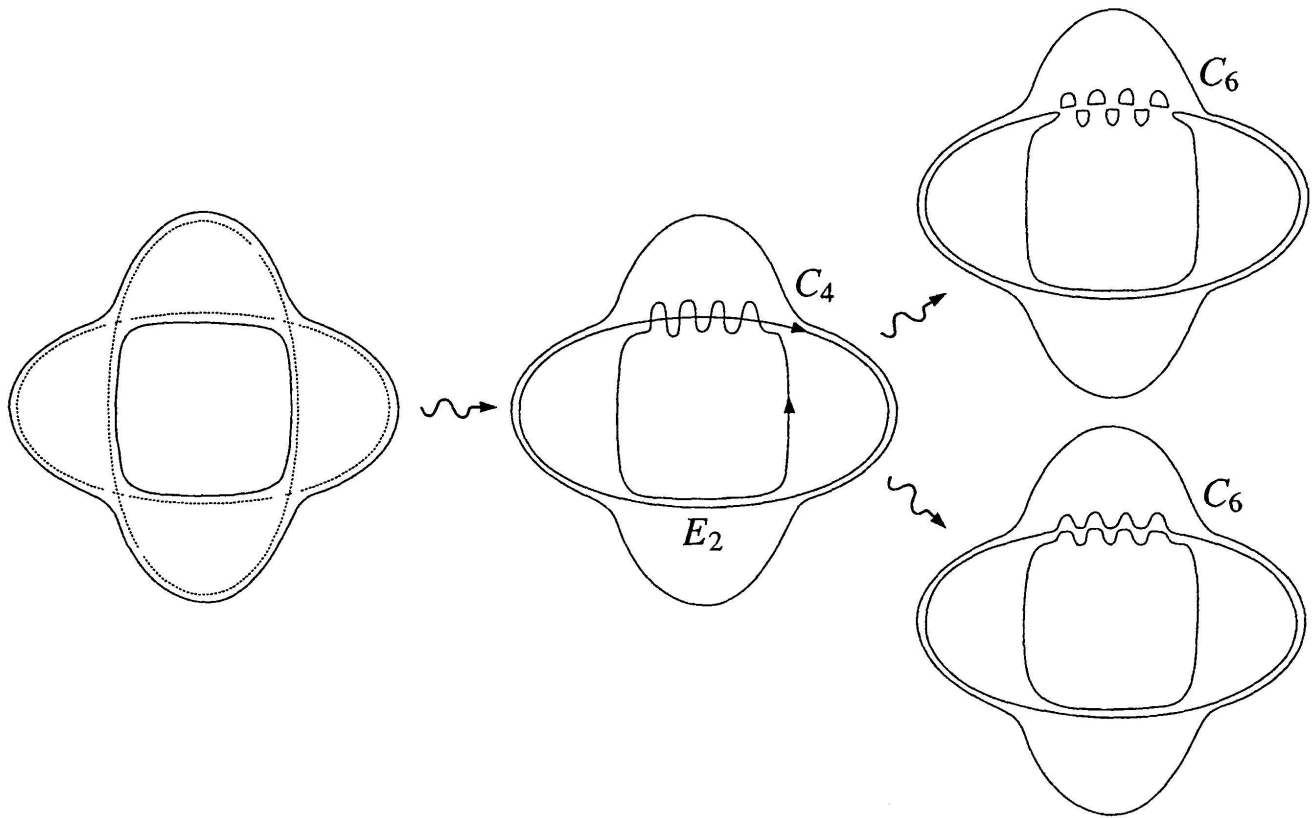


FIGURE 15

Plus généralement, la même technique (de vibration d'un ovale de  $C_d$  relativement à une conique génératrice  $E_2$ , suivie des 2 simplifications de  $C_d \cdot E_2 = 0$  compatibles avec des orientations complexes) permet de construire à partir d'une courbe d'invariants  $(d, r, 0)$  deux courbes séparantes d'invariants  $(d + 2, r + 2d - 1, 0)$  et  $(d + 2, r + 1, 0)$  avec  $r$  croissant respectivement à la vitesse de la borne de Harnack (*lissification maximale*) et à vitesse 1 (*lissification atténuée*).

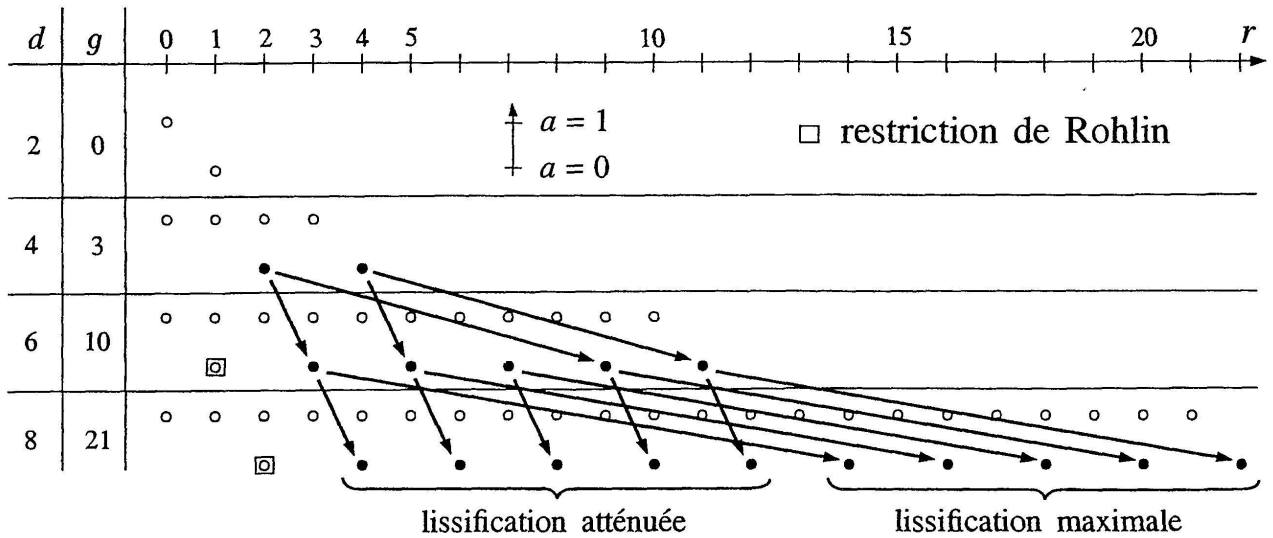


FIGURE 16

Visualisons les invariants ainsi réalisés sur le diagramme des involutions (cf. Figure 16). On observe que pour  $d = 8$ , les lissifications atténuées et maximales effectuent une « jonction » (cf. Figure 16), qui ne fera que s'accroître pour les degrés supérieurs. Ce qui garantit que l'on a mis la main sur presque tous les invariants Rohlin-admissibles pour les courbes séparantes.

**Étape 5.** On note cependant que pour  $d = 6$ , il nous manque encore la courbe d'invariants  $(d, r, a) = (6, 7, 0)$  qui échappe à cette méthode. Il n'est cependant pas difficile d'imaginer une petite construction « ad hoc » qui colmate cette lacune éphémère. On considère à cet effet la configuration de 3 coniques transverses de la Figure 17, dont la déformation proposée fournit la courbe  $C_6$  manquante d'invariants  $(d, r, a) = (6, 7, 0)$ . (Noter que c'est l'unique endroit dans tout l'argument où il est nécessaire de connaître explicitement une orientation complexe).

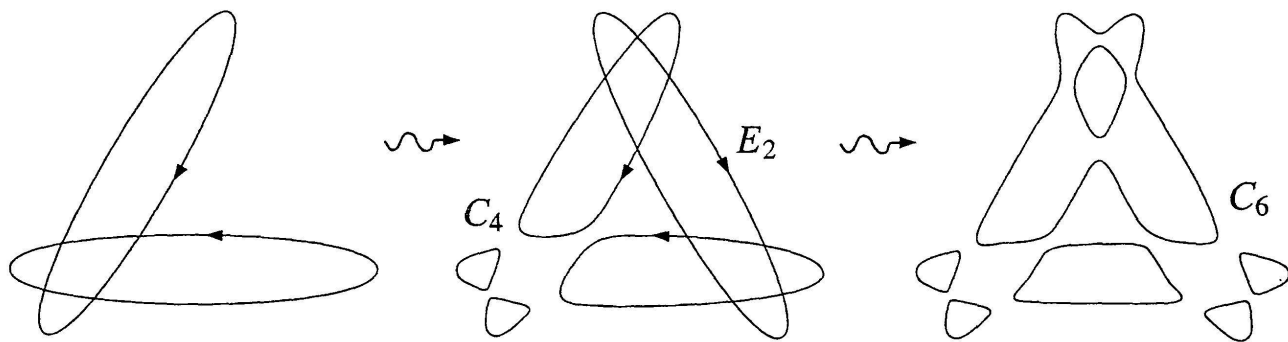


FIGURE 17

En résumé nous avons démontré :

**THÉORÈME 7.1.** *Pour les courbes planes réelles lisses de degré pair, la restriction de Rohlin est la seule sur les invariants  $(d, r, a)$ .*

## 7.2 LES COURBES DE DEGRÉ IMPAIR

Il nous reste à traiter le cas des courbes de degré impair; les valeurs admissibles des invariants  $(d, r, a)$  sont alors résumées par la Figure 18.

A nouveau on utilise la méthode de Hilbert, qui pour les degrés impairs démarre avec  $C_1$  une droite réelle et  $E_2$  une conique réelle rencontrant  $C_1$  en deux points réels. La déformation de  $C_1 \cdot E_2 = 0$  de la Figure 19 fournit une  $M$ -courbe  $C_3$  de degré 3.

Ensuite on construit une  $M$ -courbe  $C_5$  de degré 5 en faisant vibrer une des composantes de  $C_3$ , ce qui fournit une nouvelle cubique  $C_3$  oscillant

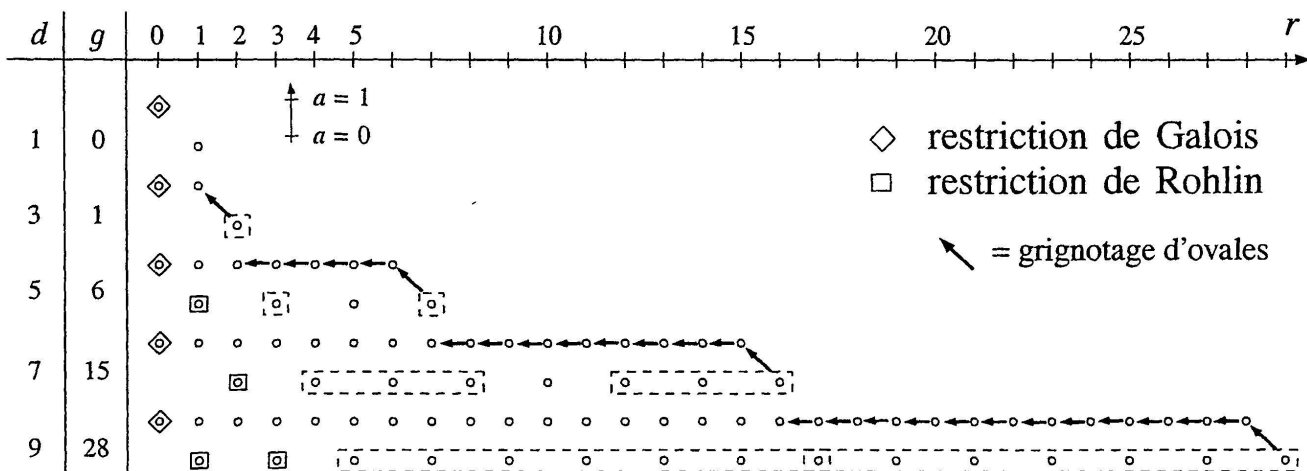


FIGURE 18

relativement à la conique génératrice  $E_2$  (cf. Figure 19). La simplification dessinée des points doubles de  $C_3 \cdot E_2 = 0$  fournit la  $M$ -courbe  $C_5$  cherchée.

Ensuite la même technique de grignotage des ovales nouveau-nés dans une  $M$ -courbe de Hilbert, fournit des courbes non-séparantes avec un invariant  $r$  décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré impair précédent, i.e.  $M(d - 2)$ . Les invariants  $(d, r, a)$  ainsi réalisés sont schématisés par des flèches sur la Figure 18. Ensuite en complétant la famille des courbes ainsi obtenues avec les courbes de Fermat de degré impair  $F_d : x^d + y^d = 1$  qui ont  $r = 1$  et qui sont non-séparantes pour  $d \geq 3$  (d'après l'inégalité de Rohlin par exemple), on met à nouveau la main sur un système de courbes permettant d'engendrer toutes les non-séparantes via l'opération de collage d'une petite conique. Ainsi la restriction de Galois est la seule pour les courbes non-séparantes de degré impair.

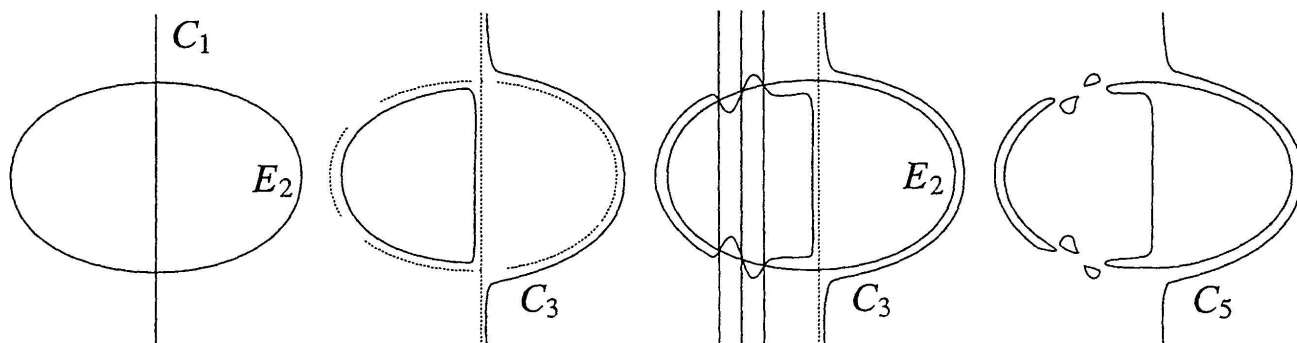


FIGURE 19

Pour les séparantes, la même méthode qu'avant fournit les invariants délimités par la ligne en tirets sur le diagramme des involutions (cf. Figure 18). On observe cette fois que l'on manque deux invariants Rohlin-admissibles,

à savoir  $(d, r, a) = (5, 5, 0)$  et  $(d, r, a) = (7, 10, 0)$  : le premier s'obtient en rajoutant une droite à une courbe d'invariants  $(d, r, a) = (4, 4, 0)$ , puis en simplifiant de façon compatible avec les orientations complexes (cf. Figure 20).

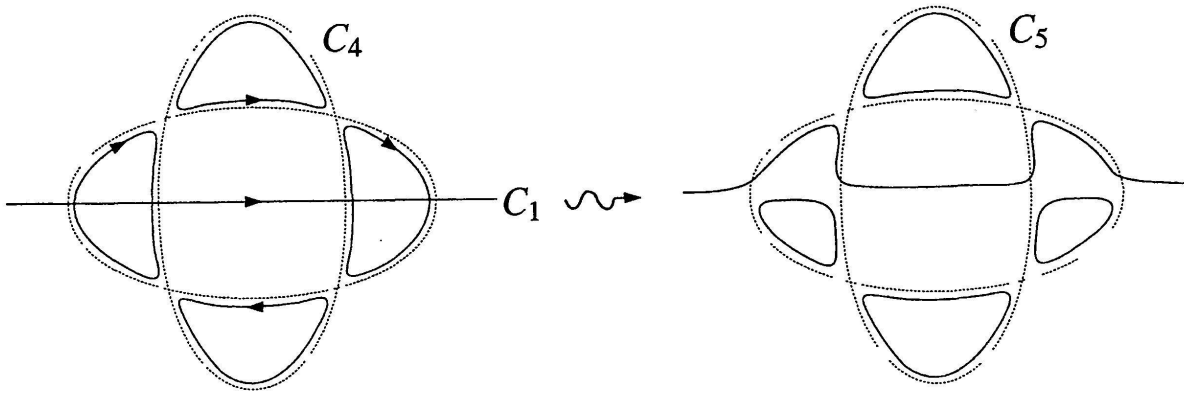


FIGURE 20

Le second s'obtient de la même manière à partir de la courbe de la Figure 15 d'invariants  $(d, r, a) = (6, 9, 0)$  (cf. Figure 21).

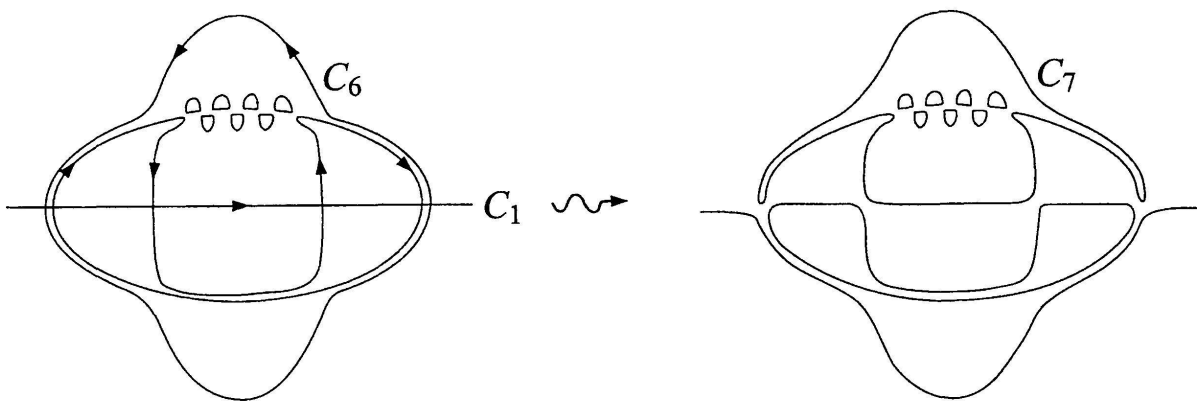


FIGURE 21

En résumé nous avons démontré :

**THÉORÈME 7.2.** *Pour les courbes planes réelles lisses de degré impair, les restrictions de Galois et de Rohlin sont les seules sur les invariants  $(d, r, a)$ .*

Cela résout donc complètement le problème de Klein de la caractérisation des surfaces symétriques réalisables comme courbes réelles lisses dans le plan.

## 8. REMERCIEMENTS

Je remercie très vivement Daniel Coray, Michel Kervaire, Jean-Jacques Risler, Felice Ronga et Claude Weber pour leur aide, ainsi que Viatcheslav Kharlamov, Alexis Marin et Oleg Viro, dont les remarques m'ont permis de raccourcir mon argument initial. Kharlamov et Viro m'ont indiqué que, lors d'un séminaire initié par Rohlin, ils disposaient du résultat principal de cet exposé (à savoir le théorème 5.2) dans les années 70–80.

## RÉFÉRENCES

- [Br] BRUSOTTI, L. Sulla "piccola variazione" di una curva piana algebrica reale. *Rend. Rom. Acc. Lincei (5)* 30 (1921), 375–379.
- [BR] BENEDETTI, R. and J.J. RISLER. *Real Algebraic and Semi-Algebraic Sets*. Hermann, 1990.
- [Fi] FIEDLER, T. Eine Beschränkung für die Lage von reellen ebenen algebraischen Kurven. *Beiträge Algebra Geom.* 11 (1981), 7–19.
- [GrHa] GROSS, B. and J. HARRIS. Real algebraic curves. *Ann. sci. École Norm. Sup.* (4) 14 (1981), 157–182.
- [Gu] GUDKOV, D. A. The topology of real projective algebraic varieties. *Uspekhi Mat. Nauk* 29:4 (1974), 3–79; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 29:4 (1974), 1–79.
- [K1] KLEIN, F. *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. B. G. Teubner, Leipzig, 1882.
- [K2] ——— Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der  $\varphi$ . *Math. Ann.* 42 (1892), 1–29.
- [K3] ——— *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. (Zweiter Band) 1922, Reprint Springer-Verlag, 1973.
- [Ma] MARIN, A. Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles. In: *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle*. Publ. Math. Univ. Paris VII, 1979, 51–68.
- [Mi] MISHACHEV, N. M. Complex orientations of plane  $M$ -curves of odd degree. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 9 (1975), 77–78; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 9 (1975), 342–343.
- [R1] ROHLIN, V. A. Complex orientations of real algebraic curves. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 8 (1974), 71–75; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 331–334.
- [R2] ——— Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk* 33:5 (1978), 77–89; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 33:5 (1978), 85–98.

- [W] WEICHOLD, G. Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung. *Z. Math. Phys.* 28 (1883), 321–351.

*(Reçu le 11 novembre 1999; version révisée reçue le 13 avril 2000)*

Alexandre Gabard

Université de Genève  
Section de Mathématiques  
Case postale 240  
CH-1211 Genève 24  
Suisse  
*e-mail*: Alexandre.Gabard@math.unige.ch