Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Autor: Bergeron, Nicolas

Kapitel: 5. Petites valeurs propres de certaines variétés hyperboliques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64797

que les géodésiques γ_i pour $\gamma \in \mathcal{C}$ sont les seules géodésiques fermées de longueur L qui ne sont pas d-réductibles dans $\widetilde{M}_i$ $(i = 1,2)$. En particulier on aura montré que $d_1 \neq d_2$ et donc que $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ ne sont pas isométriques.

Soit λ une géodésique simple fermée de longueur L dans $\widetilde{M}_i$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre un $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul alors elle appartient à $\mathcal{C}$ et la projection de revêtement restreinte à λ est une isométrie. En particulier $\lambda = \gamma_i$ pour un certain $\gamma \in \mathcal{C}$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre chaque $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique nul, alors d'après le lemme 5 elle est d-réductible et il en est de même pour λ. $\square$

De la section précédente on tire immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Pour tout n, il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension n (non nécessairement arithmétiques).*

La littérature sur l'isospectralité est vaste (cf. [Br1]), signalons que les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales ont été obtenus par M.-F. Vignéras [Vig] en dimension deux et trois à l'aide de variétés arithmétiques. Depuis, la méthode de Sunada a permis de construire de nombreux exemples en dimension deux. En grande dimension $(n > 26)$, R. Spatzier a montré [Sp], toujours à l'aide de la méthode de Sunada et à l'aide du théorème de rigidité de Mostow, que toute variété hyperbolique compacte est finiment revêtue par deux variétés hyperboliques isospectrales non isométriques. Enfin en dimension trois, A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques.

5. PETITES VALEURS PROPRES DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Dans cette section, on s'intéresse au problème de l'existence de petites valeurs propres.

On dira qu'une suite $\{M_m\}$ de variétés hyperboliques *converge uniformément sur tout compact* vers une variété hyperbolique M si pour tout compact K de M, pour m grand, il existe un compact $K_m \subset M_m$ isométrique à K. Signalons que cette définition est plus forte que la notion habituelle de convergence géométrique (cf. [CEG]). On appelle enfin *variété tube de type* (n,k) le quotient $\mathbf{H}^n/\Lambda$ de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ par un réseau Λ de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k$.

THÉORÈME 4. *Soit M une variété hyperbolique de dimension n. Supposons que M contient un cycle géodésique de dimension k. Alors, pour tout réel ε strictement positif, M est finiment revêtue par une variété hyperbolique dont la première valeur propre du laplacien est inférieure à*

$$(k-1)(n-k)+\varepsilon$$

si $2k > n+1$ et à

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \varepsilon$$

sinon.

Démonstration.

1. *Construction des revêtements finis.* On écrit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ avec Γ groupe kleinien. Puis, de même que dans la démonstration du théorème 1, quitte à conjuguer Γ, on suppose que $\Lambda = \operatorname{Stab}(\mathbf{H}^k) \cap \Gamma$ est un réseau dans $\operatorname{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k$. Soit $\{\Gamma_m\}$ la suite de sous-groupes de Γ distingués d'indices finis, fournie par le lemme principal. On a $\Lambda = \bigcap_m \Gamma_m$. La suite de variétés hyperboliques $\{M_m = \mathbf{H}^n/\Gamma_m\}$ converge alors uniformément sur tout compact vers la variété tube $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$. En effet, soit K un compact de T. Soit $\widetilde{K}$ un compact de $\mathbf{H}^n$ se projetant surjectivement sur K. L'action de Γ sur $\mathbf{H}^n$ est propre donc $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\widetilde{K} \cap \widetilde{K} \neq \varnothing\}$ est fini. Or, $\Lambda = \bigcap_m \Gamma_m$; donc, pour m grand, si $\gamma \in \Gamma_m$ est tel que $\gamma\widetilde{K} \cap \widetilde{K} \neq \varnothing$, alors $\gamma \in \Lambda$. Et la projection de revêtement de T sur M_m se restreint à K en une isométrie.

2. *Étude du laplacien hyperbolique* (cf. [Sul1] pour plus de détails). Soit $\lambda_0(T)$ la borne inférieure du spectre L^2 du laplacien sur T. Dans [Sul1], Sullivan montre que $\lambda_0(T) = (k-1)(n-k)$ si $2k > n+1$ et $\lambda_0(T) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ sinon.

Esquissons l'idée de la démonstration (de l'inégalité dont on a besoin). Étant donné ξ un point de $\mathbf{S}^{n-1}$, on peut considérer la projection stéréographique du modèle de la boule pour $\mathbf{H}^n$ vers le modèle du demi-espace pour $\mathbf{H}^n$ avec $\xi \leftrightarrow \infty$. Si y est la coordonnée verticale, alors $\Phi(x,\alpha,\xi) = (y(x))^\alpha$ est une fonction $\alpha(n-1-\alpha)$-propre du laplacien sur $\mathbf{H}^n$. (Dans ces coordonnées, $\Delta = y^2(\Delta_{\text{Euclidien}}) - (n-2)y\frac{\partial}{\partial y}$.) La construction de Patterson-Sullivan (cf. [Sul2]) implique l'existence pour $\alpha = \dim L(\Lambda) = k-1$ (car Λ est un réseau de $\operatorname{Stab}(\mathbf{H}^k)$) d'une application continue Λ-équivariante

$$\mu\colon \mathbf{H}^n \to M^+(\mathbf{S}^{n-1}_\infty)$$

$$x \mapsto \mu_x$$

telle que $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = \frac{\Phi(x,\alpha,\xi)}{\Phi(y,\alpha,\xi)}$. De plus, μ est concentrée sur l'ensemble limite $L(\Lambda) = \mathbf{S}_\infty^{k-1}(\subset \mathbf{S}_\infty^{n-1})$ de Λ. La fonction $u(x) = \int_{\mathbf{S}_\infty^{n-1}} \Phi(x,\alpha,\xi) d\mu_0(\xi)$ (où $0 \in \mathbf{H}^n$ est tel que $y(0) = 1$) pour $x \in \mathbf{H}^n$ est une fonction $\alpha(n-1-\alpha)$-propre du laplacien sur $\mathbf{H}^n$. Et

$$u(x) = \int_{\mathbf{S}_\infty^{n-1}} \frac{\Phi(x,\alpha,\xi)}{\Phi(0,\alpha,\xi)} d\mu_0(\xi) = \int_{\mathbf{S}_\infty^{n-1}} d\mu_x(\xi) = \mu_x(\mathbf{S}_\infty^{n-1}).$$

L'application u est donc Λ-invariante et de carré intégrable sur $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$. On paramètre T par $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times [0, +\infty[$. La métrique sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times \{R\}$ est multipliée par $\cosh R$ sur F et par $\sinh R$ sur $\mathbf{S}^{n-(k+1)}$. Donc l'élément de volume est multiplié par un facteur de l'ordre de $e^{(n-1)R}$. La valeur de u, quant à elle, est multipliée par un facteur de l'ordre de $e^{-\alpha R}$. Ainsi, l'intégrale sur $T - F$ est une intégrale double

$$\int_{R=0}^{\infty} \int u^2 d\sigma_R dR = O\Big(\int_0^{\infty} e^{(-2\alpha+n-1)R} \left(\int u^2 d\sigma \right) dR \Big),$$

où $d\sigma$ est l'élément de volume sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)}$ et $d\sigma_R$ l'élément de volume sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times \{R\}$. L'intégrale est finie si $2\alpha > n-1$. Donc, si $2k > n+1$, $\lambda_0(T) \le (k-1)(n-k)$. Enfin, il est connu que dans tous les cas $\lambda_0(T) \le \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ (cf. Appendice pour plus de détails).

3. *Conclusion.* Soit ε un réel strictement positif. Compte tenu de la caractérisation de Rayleigh (cf. [Ch]), il existe une fonction f de classe C^∞ sur T à support compact K telle que

$$\frac{\int_T \|df\|^2}{\int_T |f|^2} \le \lambda_0(T) + \varepsilon.$$

Mais la suite (M_m) de variétés hyperboliques converge uniformément sur tout compact vers la variété tube T. Donc, il existe un entier m_0 tel que la variété M_{m_0} contienne un compact K' isométrique à K. On en déduit l'existence d'une fonction f' sur M_{m_0} de classe C^∞ à support inclus dans K' telle que

$$\frac{\int_{M_{m_0}} \|df'\|^2}{\int_{M_{m_0}} |f'|^2} \le \lambda_0(T) + \varepsilon.$$

L'intégrale de f' sur M_0 n'a pas de raison d'être nulle, mais on peut introduire la fonction

$$g' = f' - \frac{1}{\operatorname{vol}(M_{m_0})} \int_T f.$$

Lorsque m_0 est grand $\int_{M_{m_0}} |g'|^2$ est proche de $\int_{M_{m_0}} |f'|^2$ et

$$\int_{M_{m_0}} g' = 0 .$$

La caractérisation de la première valeur propre du laplacien par les quotients de Rayleigh (cf. [Ch]) permet alors de conclure la preuve du théorème 4. □

L'idée de faire converger des revêtements finis de M vers une variété tube est empruntée à l'article [BLS] où elle est appliquée à l'étude du dual unitaire des $\mathbf{Q}$-groupes semi-simples.

Lorsque $2k > n+1$, le théorème 4 nous dit bien (comme annoncé dans l'introduction) que M a virtuellement des petites valeurs propres.

En Appendice, on détermine explicitement le spectre des variétés tubes.

Lorsque $k = n-1$, d'après le théorème 2, on sait que M a virtuellement un premier nombre de Betti positif donc grâce à la formule de Trace de Selberg [R] ou plus simplement en utilisant les quotients de Rayleigh, on peut montrer que M admet des revêtements avec des valeurs propres aussi petites que l'on veut.

Variétés arithmétiques « non standard ». En dimension impaire, on a vu qu'il existe des variétés hyperboliques arithmétiques non standard. On en esquisse la construction (cf. [Vin] et [LM] pour plus de détails).

Soient K un corps de nombres totalement réel, D une algèbre de quaternions sur K muni de l'involution σ donnée par

$$\sigma(x) = tr(x) - x, \qquad x \in D .$$

Soit V un espace vectoriel de dimension m sur D et

$$h \colon V \times V \longrightarrow D$$

une forme anti-hermitienne non dégénérée (de telle manière que pour λ, $\mu \in D$ et v, $w \in V$, $h(\lambda v, \mu w) = \sigma(\lambda) h(v, w) \mu$). Soit $G = SU(h)$ le groupe spécial unitaire de la forme h. Supposons que h soit choisi de manière à ce que

$$G(K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n, 1) \times C ,$$

où C est un groupe compact et $n+1 = 2m$. Si $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de K, alors la projection Γ de $G(\mathcal{O})$ sur $\mathrm{SO}(n, 1)$ est un réseau arithmétique. Tout sous-groupe de Γ d'indice fini agissant librement sur $\mathbf{H}^n$ donne lieu à une variété hyperbolique; en dimension $n \neq 3, 7$ ce sont les seules variétés hyperboliques arithmétiques non standard. Concluons en montrant que le théorème 4 s'applique à ces variétés. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $m-1$ et h_0 la restriction de la forme h à W. Choisissons W de manière à ce que si $H = SU(h_0)$, alors

$$H(K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n-2,1) \times C,$$

où C est un groupe compact. La projection Λ de $H(\mathcal{O})$ sur $\mathrm{SO}(n-2,1)$ est un réseau. Soit Γ_1 un sous-groupe de Γ d'indice fini agissant librement sur $\mathbf{H}^n$. Notons $\Lambda_1 = \Gamma_1 \cap \Lambda$; Λ_1 agit librement sur $\mathbf{H}^{n-2}$ et on a une immersion canonique de $\mathbf{H}^{n-2}/\Lambda_1$ dans $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$. Donc le théorème 4 s'applique et, pour $n \geq 6$, $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$ a virtuellement des petites valeurs propres. Compte tenu de notre inventaire (cf. section 3) des variétés hyperboliques connues, on en déduit :

FAIT. *Toutes les variétés hyperboliques de dimension $n \geq 6$, $n \neq 7$ de la liste du §3 ont virtuellement des petites valeurs propres.*

Enfin, remarquons que d'après un théorème de R. Brooks [Br2], toute variété riemannienne dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux admet une tour infinie de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée. En particulier, le théorème 2 assure que toute variété hyperbolique compacte qui contient un cycle géodésique de codimension 1 admet une tour de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée.

APPENDICE : SPECTRE DES VARIÉTÉS TUBES

Soient n, k deux entiers positifs, $n > k$. On rappelle qu'une *variété tube de type* (n,k) est le quotient $\mathbf{H}^n/\Lambda$ de l'espace hyperbolique de dimension n par un réseau Λ de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$. Dans la suite on se fixe un tel groupe Λ, on note $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$ que l'on suppose compacte et on note $(ds)^2$ sa métrique. Dans cet appendice, on étudie le spectre du laplacien de la variété tube $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$. La métrique sur T est donnée par (cf. [Ch])

$$(dx)^2 = (\cosh r)^2 (ds)^2 + (dr)^2 + (\sinh r)^2 (d\sigma)^2\,,$$

où $x = (s, r, \sigma)$ avec $s \in F$, $r \in]0, +\infty[$, $\sigma \in \mathbf{S}^{n-(k+1)}$. On écrit