4. Variétés hyperboliques isospectrales

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

4. *Variétés hyperboliques de dimension* 3. En dimension trois, les variétés qui vérifient les hypothèses du théorème d'hyperbolisation de Thurston ou qui sont obtenues par le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique [Th] fournissent une myriade d'exemples de variétés hyperboliques pour lesquelles la conjecture de Thurston demeure ouverte. Dans [Lu1], Lubotzky pose la question de savoir si les 3-variétés hyperboliques non compactes de volume fini (dont on sait qu'elles vérifient la conjecture de Thurston, cf. [He]) admettent un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux. Signalons que, dans [CLR], Cooper, Long et Reid répondent par l'affirmative à ce problème.

5. *Variétés arithmétiques « non standard ».* En dimension impaire il existe des variétés arithmétiques non standard (toutes compactes). On en esquisse la construction à la section 5. Les théorèmes précédents ne s'appliquent pas à celles-ci en raison de l'absence de cycles géodésiques de codimension 1. La conjecture de Thurston est néanmoins vérifiée pour la plupart de ces variétés (cf. [Li], [RV], [LM] et [Lu2]).

4. Variétés hyperboliques isospectrales

Soit M_0 une variété hyperbolique compacte de dimension n. On suppose que M_0 contient un cycle géodésique de dimension $n-1$. Le lemme suivant découle du théorème 2.

LEMME 4. *Il existe un revêtement fini M de M_0 tel que*

1) *M contient deux sous-variétés plongées totalement géodésiques disjointes F_1 et F_2 ;*
2) *M contient deux lacets fermés disjoints γ_1 et γ_2 ;*
3) *pour $i=1,2$, γ_i rencontre F_i en un et un seul point;*
4) *les ensembles $\gamma_1 \cap F_2$ et $\gamma_2 \cap F_1$ sont vides;*
5) *il existe une isométrie φ de M qui permute F_1 et F_2.*

Démonstration. D'après le théorème 2, quitte à remplacer M_0 par un revêtement fini que nous noterons toujours M_0, on peut supposer qu'il existe deux sous-variétés totalement géodésiques orientées F et V dans M_0 dont l'union est non séparante. Le nombre d'intersection homologique entre un lacet fermé de M_0 et la sous-variété V induit un morphisme surjectif p_1

du groupe fondamental $\pi_1(M_0)$ de M_0 dans $\mathbf{Z}$. Soit n_1 un entier non nul. Soit M le revêtement fini (cyclique) galoisien de M_0 associé au sous-groupe $p_1^{-1}(n_1\mathbf{Z})$ de $\pi_1(M_0)$: le groupe de Galois de ce revêtement est isomorphe à $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$. Soit γ un lacet fermé dans M_0 intersectant l'ensemble $F \cup V$ en un unique point qui appartient à F. Le lacet γ et la variété F se relèvent au revêtement M. Soit F_1 un relevé arbitraire de F. On suppose n_1 pair. Soit φ l'isométrie de M induite par la transformation de revêtement associée à l'élément $\frac{n_1}{2}$ du groupe $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$. Soit $F_2 = \varphi(F_1)$. La sous-variété F_2 est un relevé de F et l'isométrie φ permute F_1 et F_2. De plus il existe une constante c_0 indépendante de n_1 telle que $d(F_1, F_2) > c_0 n_1$. Donc, pour n_1 suffisamment grand, il existe deux relevés γ_1, γ_2 de γ dans M tels que les ensembles $\gamma_1 \cap F_2$ et $\gamma_2 \cap F_1$ soient vides. Ce qui achève la démonstration du lemme 4. □

DÉFINITION. Soit γ une géodésique fermée dans une variété hyperbolique. On dira que γ est *d-réductible* si γ est librement homotope à un produit de lacets pointés tous librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que d.

Remarquons dès maintenant que cette propriété est invariante par isométries.

Soit M la variété obtenue dans le lemme 4. Soit W la variété compacte à bord obtenue en découpant M le long de F_1 et de F_2. Soit d un réel supérieur ou égal à la longueur de γ_1 et de γ_2 tel que toutes les géodésiques de W soient d-réductibles (un tel d existe car la variété W est compacte). Soit δ le diamètre de la variété W.

LEMME 5. *Il existe $L > 0$ (que l'on peut choisir arbitrairement grand) et un revêtement fini $\widetilde{M}$ de M tels que*

1) *$\widetilde{M}$ contient deux sous-variétés disjointes totalement géodésiques $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ dont l'union est non séparante;*

2) *les géodésiques de l'ensemble $C_i = \{$géodésiques fermées rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale$\}$ $(i = 1, 2)$ rencontrent l'ensemble $\widetilde{F}_1 \cup \widetilde{F}_2$ en un et un seul point qui, de plus, appartient à $\widetilde{F}_i$;*

3) *l'ensemble C des géodésiques fermées de longueur L qui ne sont pas d-réductibles est égal à la réunion disjointe de C_1 et de C_2 ;*

4) *deux géodésiques quelconques dans C sont à distance plus petite que δ.*

Démonstration. Le corollaire qui suit le théorème 2 montre que les sous-variétés F_1 et F_2 de M permettent de construire une application continue f de M sur un bouquet de deux cercles. Soit $x_0 \in M$ un point n'appartenant pas à $F_1 \cup F_2$. L'application f induit un morphisme surjectif p_2 du groupe fondamental $\pi_1(M, x_0)$ sur le groupe libre de rang deux $\langle a, b \rangle$, où chaque générateur correspond à une boucle du bouquet de cercles. Soit n_2 un entier positif non nul. Soit G le sous-groupe

$$\left\langle a^{n_2}, aba^{-1}, a^2ba^{-2}, \dots, a^{n_2-1}ba^{-n_2+1}, b^{n_2}, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, \dots, b^{n_2-1}ab^{-n_2+1} \right\rangle$$

du groupe $\langle a, b \rangle$. Soit $\widetilde{M}$ le revêtement fini de M associé au sous-groupe $p_2^{-1}(G)$ de $\pi_1(M, x_0)$; c'est un revêtement de degré $2n_2 - 1$ qui n'est pas galoisien. Le revêtement du bouquet de cercles associé au sous-groupe G est un graphe $\mathcal{G}$ décrit dans la figure 2 (lorsque $n_2 = 5$).

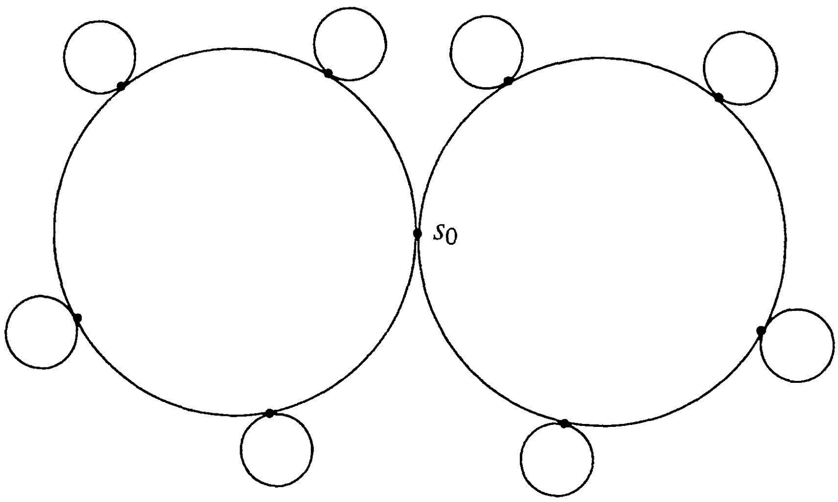

FIGURE 2
Le graphe $\mathcal{G}$

On peut construire le revêtement $\widetilde{M}$ de la manière suivante. On découpe M le long des sous-variétés F_1 et F_2. On obtient ainsi la variété à bord W avec

$$\partial W = F_1^+ \cup F_1^- \cup F_2^+ \cup F_2^- .$$

On construit $\widetilde{M}$ en remplaçant chaque sommet s du graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus avec pour arêtes sortantes e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^- par une copie de W et en recollant les F_i^+ avec les F_i^- se trouvant sur une même arête. Soit $\widetilde{x}_0$ le point de $\widetilde{M}$ au-dessus de x_0 qui appartient à la copie de W identifiée au sommet s_0 du graphe $\mathcal{G}$. L'application f se relève en une application $\widetilde{f}$ continue de $\widetilde{M}$ dans le graphe $\mathcal{G}$ qui induit un morphisme surjectif $p_3 \colon \pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0) \to G$.

L'isométrie φ (donnée par le point 5) du lemme 4) envoie le point x_0 de M sur un point n'appartenant pas à la réunion de F_1 et de F_2 et permute F_1 et F_2 ; elle induit donc un isomorphisme de $\pi_1(M, x_0)$ qui laisse stable le sous-groupe $p_2^{-1}(G)$. L'isométrie φ se relève donc en une isométrie $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{M}$.

La préimage de F_1 (resp. F_2) est la réunion disjointe de $2n_2 - 1$ copies isométriques de F_1 (resp. F_2). La préimage de γ_1 (resp. γ_2) a n_2 composantes connexes: $n_2 - 1$ d'entre elles sont isométriques à γ_1 (resp. γ_2) et l'autre est un revêtement de degré n_2 de γ_1 (resp. γ_2) que l'on note $\widetilde{\gamma}_1$ (resp. $\widetilde{\gamma}_2$). Le lacet $\widetilde{\gamma}_1$ (resp. $\widetilde{\gamma}_2$) rencontre n_2 relevés de F_1 (resp. F_2): $F_1^1, \dots, F_1^{n_2}$ (resp. $F_2^1, \dots, F_2^{n_2}$); on en choisit un que l'on note $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) de manière à ce que $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ soient permutées par $\widetilde{\varphi}$ et $\mathrm{d}(\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2) > c_1 n_2$ où c_1 est une constante indépendante de n_2.

Pour $i = 1, 2$ soit C_i l'ensemble des géodésiques fermées de $\widetilde{M}$ rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale que l'on note l_i. Puisque $\widetilde{\varphi}$ est une isométrie de $\widetilde{M}$ qui permute les $\widetilde{F}_i$, on a $l_1 = l_2$; on note cette valeur commune L.

FAIT 1. *Tout élément de C_i est une réunion de segments géodésiques joignant les F_i^j pour $j = 1, \dots, n_2$. En particulier, $L > c_2 n_2$ où c_2 est une constante indépendante de n_2.*

En effet, soit $\gamma \in C_i$. Soit $g \in \pi_1(M, \widetilde{x}_0)$ un représentant de γ. Puisque γ rencontre $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul, la somme des puissances de a^{n_2} (resp. b^{n_2}) si $i = 1$ (resp. si $i = 2$) dans l'écriture réduite de $p_3(g) \in G$ (sur les générateurs donnés dans la définition de G) est non nulle. Alors, γ rencontre tous les F_i^j pour $j = 1, \dots, n_2$ avec un degré d'intersection homologique non nul, et le fait 1 en découle.

FAIT 2. *Pour n_2 suffisamment grand, tout élément de C_1 (resp. C_2) est disjoint de $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$).*

En effet, soit γ un élément de C_1 (resp. C_2) qui rencontre $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$). Le lacet γ contient un sous-chemin géodésique disjoint de $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) partant d'un point de $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ et y revenant après avoir rencontré $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$). Un tel chemin est de longueur $> \frac{c_1}{2} n_2$. Or le diamètre de $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ est égal à δ. Donc, si $n_2 > \frac{2\delta}{c_1}$, on peut tronquer γ et obtenir un lacet de longueur plus petit que L et rencontrant $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) avec un nombre d'intersection homologique non nul; ce qui est absurde par définition de L.

FAIT 3. *Pour n_2 suffisamment grand, tout élément de $\mathcal{C}_i$ pour $i = 1, 2$, rencontre $\widetilde{F}_i$ en un unique point.*

En effet, soit γ un élément de $\mathcal{C}_i$ qui rencontre deux fois $\widetilde{F}_i$. Soit δ_i le diamètre de $\widetilde{F}_i$. Si $n_2 > \frac{\delta_i}{c_2}$, on peut tronquer γ et obtenir un lacet de longueur plus petite que L et rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul; ce qui est absurde par définition de L.

Dans la suite on suppose que n_2 est choisi suffisamment grand de manière à ce que les conclusions des faits 2 et 3 soient vérifiées et $L > 2d$. Les deux premiers points du lemme 5 sont donc démontrés.

FAIT 4. *Tout lacet γ représenté dans $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0)$ par un élément du noyau de p_3 est d-réductible.*

En effet un tel lacet γ est homotope à un lacet de W; le fait 4 résulte donc de la définition de d.

Montrons le point 3). Montrons d'abord que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Les $n_2 - 1$ préimages isométriques (de longueur $\leq d$) de γ_1 (resp. γ_2) sont représentées par des éléments de $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0)$ dont les images par p_3 sont les $b^j a b^{-j}$ (resp. $a^j b a^{-j}$) pour $j = 1, \ldots, n_2 - 1$. Donc d'après le fait 4, l'ensemble des géodésiques d-réductibles est représenté dans $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0)$ par le sous-groupe $p_3^{-1}(H)$ où H est un sous-groupe normal de G contenant les $b^j a b^{-j}$ et les $a^j b a^{-j}$ pour $j = 1, \ldots n_2 - 1$. Soit γ un élément de $\mathcal{C}$. Soit $g \in G$ l'image par p_3 d'un représentant de γ dans $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0)$. Alors, $g \notin H$ et, dans l'écriture réduite de g sur les générateurs de G, la somme des puissances des a^{n_2} ou des b^{n_2} est non nulle. Donc γ intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ avec un nombre d'intersection homologique non nul. Comme γ est de longueur L, elle appartient à $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}$ i.e. que les éléments de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ ne sont pas d-réductibles. Soit $\gamma \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Supposons que γ soit une géodésique d-réductible. Alors γ s'écrit comme un produit libre de lacets librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que d. Mais γ intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ en un unique point, donc une des géodésiques de longueur d intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ avec un degré d'intersection homologique non nul, ce qui est impossible par minimalité de L. Le point 3) du lemme 5 est donc démontré.

Enfin le point 4) se déduit simplement du fait que tout élément de $\mathcal{C}$ passe par un point de l'ensemble $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ qui est de diamètre δ. $\square$

THÉORÈME 3. *Soit M_0 une variété hyperbolique compacte. On suppose que M_0 contient un cycle géodésique de codimension un. Alors M_0 admet deux revêtements finis isospectraux mais non isométriques.*

Démonstration. Pour construire ces deux revêtements isospectraux on va utiliser la méthode de Sunada (pour un survol introductif de l'isospectralité et en particulier de la méthode de Sunada cf. [Br1]). D'après les lemmes 4 et 5, il existe un revêtement fini $\widetilde{M}$ de M_0 comme dans le lemme 5 (dans la suite on adopte les notations du lemme 5 et on suppose choisi $L > 2\delta$).

On considère les graphes

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{X}/H_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{X}/H_2$$

où $\mathcal{X}$ est le graphe de Cayley de SL(3,2) pour les générateurs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

H_1 est le sous-groupe de SL(3,2) constitué des matrices $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, et H_2 le sous-groupe de SL(3,2) constitué des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

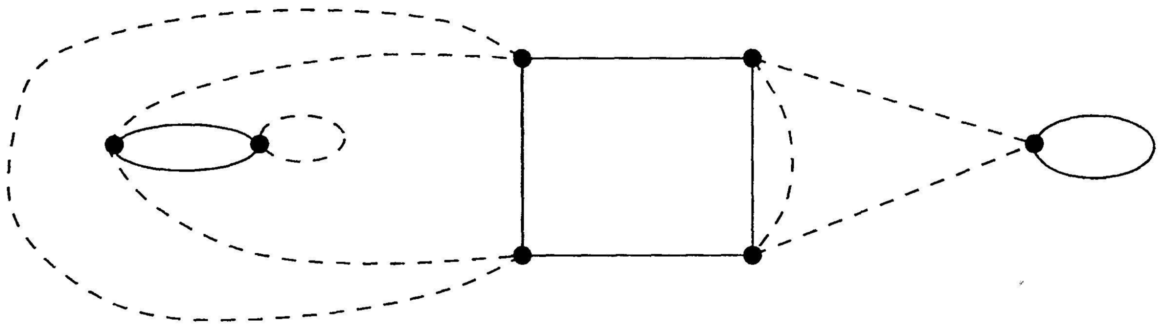

FIGURE 3
Le graphe $\mathcal{G}_1$

On commence par construire un revêtement régulier de $\widetilde{M}$: $\widehat{M}$ de groupe de Galois isomorphe à $SL(3,2)$. La variété $\widetilde{M}$ contient deux sous-variétés $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ auxquelles on sait associer un morphisme surjectif du groupe fondamental de $\widetilde{M}$ sur le groupe libre de rang deux qui se surjecte sur $SL(3,2)$. Soit donc p_4 la surjection de $\pi_1(\widetilde{M})$ sur $SL(3,2)$. On note $\widehat{M}$ le revêtement fini de $\widetilde{M}$ associé au sous-groupe $p_4^{-1}(\{e\})$ de $\pi_1(\widetilde{M})$. Le revêtement $\widehat{M}$ peut

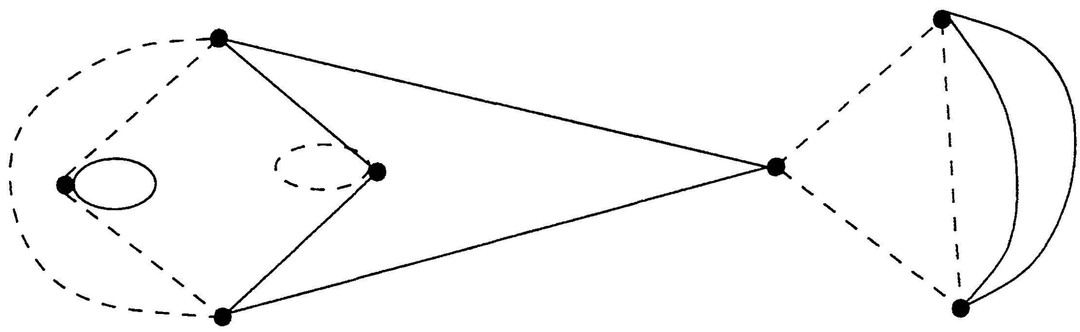

FIGURE 4
Le graphe $\mathcal{G}_2$

aussi s'obtenir de la même manière que dans la démonstration du lemme 5 en recollant la variété $\widetilde{M}-(\widetilde{F}_1\cup\widetilde{F}_2)$ suivant le graphe $\mathcal{X}$. La variété $\widehat{M}$ ainsi obtenue admet une action de SL(3, 2) par isométries de la même manière que SL(3, 2) agit sur $\mathcal{X}$. Maintenant, soient $\widetilde{M}_1=\widehat{M}/H_1$ et $\widetilde{M}_2=\widehat{M}/H_2$. Puisque l'action de SL(3, 2) sur $\widehat{M}$ est compatible avec son action sur $\mathcal{X}$, les variétés $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ peuvent aussi être obtenues en recollant des copies de $\widetilde{M}-(\widetilde{F}_1\cup\widetilde{F}_2)$ suivant les graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. On applique alors le théorème suivant.

THÉORÈME (Sunada [Sun]). *Soit G un groupe fini qui agit librement sur une variété riemannienne compacte $\widehat{M}$ par isométries. Soient $H_1, H_2 < G$ deux sous-groupes vérifiant*

$$|[g]\cap H_1|=|[g]\cap H_2|$$

pour tout $g\in G$ (où $[g]$ désigne la classe de conjugaison de g dans G). Alors les deux quotients $M_1=\widehat{M}/H_1$ et $M_2=\widehat{M}/H_2$ sont isospectraux.

Il est classique (cf. [Br1]) que les groupes $H_1, H_2 < G=\mathrm{SL}(3,2)$ vérifient la condition du théorème de Sunada. On en déduit que les variétés hyperboliques $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ construites ci-dessus sont isospectrales.

Pour conclure il nous reste à montrer que les variétés $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ ne sont pas isométriques. Pour ce faire on compte le nombre maximal d_i de géodésiques simples de longueurs L qui ne sont pas d-réductibles et qui sont deux à deux à distance $\leq 2L+2\delta$ dans $\widetilde{M}_i$.

Chaque élément γ de $\mathcal{C}$ admet 3 relevés dans chaque $\widetilde{M}_i$ pour $i=1,2$ dont un seul lui est isométrique; on le note γ_i. De plus dans $\widetilde{M}_1$ il existe γ_1 et γ_1' des relevés de $\gamma,\gamma'\in\mathcal{C}$ à distance $\geq 3L>2L+2\delta$ et dans $\widetilde{M}_2$ pour tous $\gamma,\gamma'\in\mathcal{C}$, γ_2 et γ_2' sont à distance $\leq 2L+2\delta$. Nous allons montrer que les géodésiques γ_i pour $\gamma \in \mathcal{C}$ sont les seules géodésiques fermées de longueur L qui ne sont pas d-réductibles dans $\widetilde{M}_i$ $(i = 1,2)$. En particulier on aura montré que $d_1 \neq d_2$ et donc que $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ ne sont pas isométriques.

Soit λ une géodésique simple fermée de longueur L dans $\widetilde{M}_i$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre un $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul alors elle appartient à $\mathcal{C}$ et la projection de revêtement restreinte à λ est une isométrie. En particulier $\lambda = \gamma_i$ pour un certain $\gamma \in \mathcal{C}$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre chaque $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique nul, alors d'après le lemme 5 elle est d-réductible et il en est de même pour λ. $\square$

De la section précédente on tire immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Pour tout n, il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension n (non nécessairement arithmétiques).*

La littérature sur l'isospectralité est vaste (cf. [Br1]), signalons que les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales ont été obtenus par M.-F. Vignéras [Vig] en dimension deux et trois à l'aide de variétés arithmétiques. Depuis, la méthode de Sunada a permis de construire de nombreux exemples en dimension deux. En grande dimension $(n > 26)$, R. Spatzier a montré [Sp], toujours à l'aide de la méthode de Sunada et à l'aide du théorème de rigidité de Mostow, que toute variété hyperbolique compacte est finiment revêtue par deux variétés hyperboliques isospectrales non isométriques. Enfin en dimension trois, A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques.

5. PETITES VALEURS PROPRES DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Dans cette section, on s'intéresse au problème de l'existence de petites valeurs propres.

On dira qu'une suite $\{M_m\}$ de variétés hyperboliques *converge uniformément sur tout compact* vers une variété hyperbolique M si pour tout compact K de M, pour m grand, il existe un compact $K_m \subset M_m$ isométrique à K. Signalons que cette définition est plus forte que la notion habituelle de convergence géométrique (cf. [CEG]). On appelle enfin *variété tube de type* (n,k) le quotient $\mathbf{H}^n/\Lambda$ de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ par un réseau Λ de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k$.