

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	46 (2000)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES
<b>Autor:</b>	Bergeron, Nicolas
<b>Kapitel:</b>	4. Variétés hyperboliques isospectrales
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-64797">https://doi.org/10.5169/seals-64797</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

4. *Variétés hyperboliques de dimension 3.* En dimension trois, les variétés qui vérifient les hypothèses du théorème d'hyperbolisation de Thurston ou qui sont obtenues par le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique [Th] fournissent une myriade d'exemples de variétés hyperboliques pour lesquelles la conjecture de Thurston demeure ouverte. Dans [Lu1], Lubotzky pose la question de savoir si les 3-variétés hyperboliques non compactes de volume fini (dont on sait qu'elles vérifient la conjecture de Thurston, cf. [He]) admettent un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux. Signalons que, dans [CLR], Cooper, Long et Reid répondent par l'affirmative à ce problème.

5. *Variétés arithmétiques «non standard».* En dimension impaire il existe des variétés arithmétiques non standard (toutes compactes). On en esquisse la construction à la section 5. Les théorèmes précédents ne s'appliquent pas à celles-ci en raison de l'absence de cycles géodésiques de codimension 1. La conjecture de Thurston est néanmoins vérifiée pour la plupart de ces variétés (cf. [Li], [RV], [LM] et [Lu2]).

#### 4. VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ISOSPECTRALES

Soit  $M_0$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$ . On suppose que  $M_0$  contient un cycle géodésique de dimension  $n - 1$ . Le lemme suivant découle du théorème 2.

**LEMME 4.** *Il existe un revêtement fini  $M$  de  $M_0$  tel que*

- 1)  *$M$  contient deux sous-variétés plongées totalement géodésiques disjointes  $F_1$  et  $F_2$ ;*
- 2)  *$M$  contient deux lacets fermés disjoints  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ;*
- 3) *pour  $i = 1, 2$ ,  $\gamma_i$  rencontre  $F_i$  en un et un seul point;*
- 4) *les ensembles  $\gamma_1 \cap F_2$  et  $\gamma_2 \cap F_1$  sont vides;*
- 5) *il existe une isométrie  $\varphi$  de  $M$  qui permute  $F_1$  et  $F_2$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 2, quitte à remplacer  $M_0$  par un revêtement fini que nous noterons toujours  $M_0$ , on peut supposer qu'il existe deux sous-variétés totalement géodésiques orientées  $F$  et  $V$  dans  $M_0$  dont l'union est non séparante. Le nombre d'intersection homologique entre un lacet fermé de  $M_0$  et la sous-variété  $V$  induit un morphisme surjectif  $p_1$

du groupe fondamental  $\pi_1(M_0)$  de  $M_0$  dans  $\mathbf{Z}$ . Soit  $n_1$  un entier non nul. Soit  $M$  le revêtement fini (cyclique) galoisien de  $M_0$  associé au sous-groupe  $p_1^{-1}(n_1\mathbf{Z})$  de  $\pi_1(M_0)$  : le groupe de Galois de ce revêtement est isomorphe à  $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$ . Soit  $\gamma$  un lacet fermé dans  $M_0$  intersectant l'ensemble  $F \cup V$  en un unique point qui appartient à  $F$ . Le lacet  $\gamma$  et la variété  $F$  se relèvent au revêtement  $M$ . Soit  $F_1$  un relevé arbitraire de  $F$ . On suppose  $n_1$  pair. Soit  $\varphi$  l'isométrie de  $M$  induite par la transformation de revêtement associée à l'élément  $\frac{n_1}{2}$  du groupe  $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$ . Soit  $F_2 = \varphi(F_1)$ . La sous-variété  $F_2$  est un relevé de  $F$  et l'isométrie  $\varphi$  permute  $F_1$  et  $F_2$ . De plus il existe une constante  $c_0$  indépendante de  $n_1$  telle que  $d(F_1, F_2) > c_0 n_1$ . Donc, pour  $n_1$  suffisamment grand, il existe deux relevés  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\gamma$  dans  $M$  tels que les ensembles  $\gamma_1 \cap F_2$  et  $\gamma_2 \cap F_1$  soient vides. Ce qui achève la démonstration du lemme 4.  $\square$

**DÉFINITION.** Soit  $\gamma$  une géodésique fermée dans une variété hyperbolique. On dira que  $\gamma$  est *d-réductible* si  $\gamma$  est librement homotope à un produit de lacets pointés tous librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que  $d$ .

Remarquons dès maintenant que cette propriété est invariante par isométries.

Soit  $M$  la variété obtenue dans le lemme 4. Soit  $W$  la variété compacte à bord obtenue en découpant  $M$  le long de  $F_1$  et de  $F_2$ . Soit  $d$  un réel supérieur ou égal à la longueur de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  tel que toutes les géodésiques de  $W$  soient *d-réductibles* (un tel  $d$  existe car la variété  $W$  est compacte). Soit  $\delta$  le diamètre de la variété  $W$ .

**LEMME 5.** *Il existe  $L > 0$  (que l'on peut choisir arbitrairement grand) et un revêtement fini  $\tilde{M}$  de  $M$  tels que*

- 1)  *$\tilde{M}$  contient deux sous-variétés disjointes totalement géodésiques  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  dont l'union est non séparante ;*
- 2) *les géodésiques de l'ensemble  $\mathcal{C}_i = \{\text{géodésiques fermées rencontrant } \tilde{F}_i \text{ avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale}\}$  ( $i = 1, 2$ ) rencontrent l'ensemble  $\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2$  en un et un seul point qui, de plus, appartient à  $\tilde{F}_i$  ;*
- 3) *l'ensemble  $\mathcal{C}$  des géodésiques fermées de longueur  $L$  qui ne sont pas *d-réductibles* est égal à la réunion disjointe de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{C}_2$  ;*
- 4) *deux géodésiques quelconques dans  $\mathcal{C}$  sont à distance plus petite que  $\delta$ .*

*Démonstration.* Le corollaire qui suit le théorème 2 montre que les sous-variétés  $F_1$  et  $F_2$  de  $M$  permettent de construire une application continue  $f$  de  $M$  sur un bouquet de deux cercles. Soit  $x_0 \in M$  un point n'appartenant pas à  $F_1 \cup F_2$ . L'application  $f$  induit un morphisme surjectif  $p_2$  du groupe fondamental  $\pi_1(M, x_0)$  sur le groupe libre de rang deux  $\langle a, b \rangle$ , où chaque générateur correspond à une boucle du bouquet de cercles. Soit  $n_2$  un entier positif non nul. Soit  $G$  le sous-groupe

$$\langle a^{n_2}, aba^{-1}, a^2ba^{-2}, \dots, a^{n_2-1}ba^{-n_2+1}, b^{n_2}, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, \dots, b^{n_2-1}ab^{-n_2+1} \rangle$$

du groupe  $\langle a, b \rangle$ . Soit  $\tilde{M}$  le revêtement fini de  $M$  associé au sous-groupe  $p_2^{-1}(G)$  de  $\pi_1(M, x_0)$ ; c'est un revêtement de degré  $2n_2 - 1$  qui n'est pas galoisien. Le revêtement du bouquet de cercles associé au sous-groupe  $G$  est un graphe  $\mathcal{G}$  décrit dans la figure 2 (lorsque  $n_2 = 5$ ).

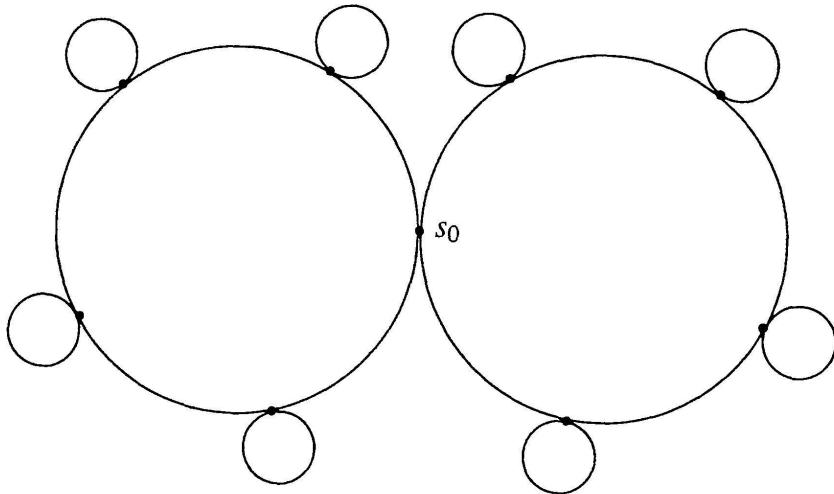


FIGURE 2  
Le graphe  $\mathcal{G}$

On peut construire le revêtement  $\tilde{M}$  de la manière suivante. On découpe  $M$  le long des sous-variétés  $F_1$  et  $F_2$ . On obtient ainsi la variété à bord  $W$  avec

$$\partial W = F_1^+ \cup F_1^- \cup F_2^+ \cup F_2^-.$$

On construit  $\tilde{M}$  en remplaçant chaque sommet  $s$  du graphe  $\mathcal{G}$  ci-dessus avec pour arêtes sortantes  $e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^-$  par une copie de  $W$  et en recollant les  $F_i^+$  avec les  $F_i^-$  se trouvant sur une même arête. Soit  $\tilde{x}_0$  le point de  $\tilde{M}$  au-dessus de  $x_0$  qui appartient à la copie de  $W$  identifiée au sommet  $s_0$  du graphe  $\mathcal{G}$ . L'application  $f$  se relève en une application  $\tilde{f}$  continue de  $\tilde{M}$  dans le graphe  $\mathcal{G}$  qui induit un morphisme surjectif  $p_3: \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \rightarrow G$ .

L'isométrie  $\varphi$  (donnée par le point 5) du lemme 4) envoie le point  $x_0$  de  $M$  sur un point n'appartenant pas à la réunion de  $F_1$  et de  $F_2$  et permute  $F_1$  et  $F_2$ ; elle induit donc un isomorphisme de  $\pi_1(M, x_0)$  qui laisse stable le sous-groupe  $p_2^{-1}(G)$ . L'isométrie  $\varphi$  se relève donc en une isométrie  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{M}$ .

La préimage de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) est la réunion disjointe de  $2n_2 - 1$  copies isométriques de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ). La préimage de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) a  $n_2$  composantes connexes:  $n_2 - 1$  d'entre elles sont isométriques à  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) et l'autre est un revêtement de degré  $n_2$  de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) que l'on note  $\tilde{\gamma}_1$  (resp.  $\tilde{\gamma}_2$ ). Le lacet  $\tilde{\gamma}_1$  (resp.  $\tilde{\gamma}_2$ ) rencontre  $n_2$  relevés de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ):  $F_1^1, \dots, F_1^{n_2}$  (resp.  $F_2^1, \dots, F_2^{n_2}$ ); on en choisit un que l'on note  $\tilde{F}_1$  (resp.  $\tilde{F}_2$ ) de manière à ce que  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  soient permutées par  $\tilde{\varphi}$  et  $d(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) > c_1 n_2$  où  $c_1$  est une constante indépendante de  $n_2$ .

Pour  $i = 1, 2$  soit  $\mathcal{C}_i$  l'ensemble des géodésiques fermées de  $\tilde{M}$  rencontrant  $\tilde{F}_i$  avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale que l'on note  $l_i$ . Puisque  $\tilde{\varphi}$  est une isométrie de  $\tilde{M}$  qui permute les  $\tilde{F}_i$ , on a  $l_1 = l_2$ ; on note cette valeur commune  $L$ .

**FAIT 1.** *Tout élément de  $\mathcal{C}_i$  est une réunion de segments géodésiques joignant les  $F_i^j$  pour  $j = 1, \dots, n_2$ . En particulier,  $L > c_2 n_2$  où  $c_2$  est une constante indépendante de  $n_2$ .*

En effet, soit  $\gamma \in \mathcal{C}_i$ . Soit  $g \in \pi_1(M, \tilde{x}_0)$  un représentant de  $\gamma$ . Puisque  $\gamma$  rencontre  $\tilde{F}_i$  avec un nombre d'intersection homologique non nul, la somme des puissances de  $a^{n_2}$  (resp.  $b^{n_2}$ ) si  $i = 1$  (resp. si  $i = 2$ ) dans l'écriture réduite de  $p_3(g) \in G$  (sur les générateurs donnés dans la définition de  $G$ ) est non nulle. Alors,  $\gamma$  rencontre tous les  $F_i^j$  pour  $j = 1, \dots, n_2$  avec un degré d'intersection homologique non nul, et le fait 1 en découle.

**FAIT 2.** *Pour  $n_2$  suffisamment grand, tout élément de  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) est disjoint de  $\tilde{F}_2$  (resp.  $\tilde{F}_1$ ).*

En effet, soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) qui rencontre  $\tilde{F}_2$  (resp.  $\tilde{F}_1$ ). Le lacet  $\gamma$  contient un sous-chemin géodésique disjoint de  $\tilde{F}_1$  (resp.  $\tilde{F}_2$ ) partant d'un point de  $\tilde{f}^{-1}(s_0)$  et y revenant après avoir rencontré  $\tilde{F}_2$  (resp.  $\tilde{F}_1$ ). Un tel chemin est de longueur  $> \frac{c_1}{2} n_2$ . Or le diamètre de  $\tilde{f}^{-1}(s_0)$  est égal à  $\delta$ . Donc, si  $n_2 > \frac{2\delta}{c_1}$ , on peut tronquer  $\gamma$  et obtenir un lacet de longueur plus petit que  $L$  et rencontrant  $\tilde{F}_1$  (resp.  $\tilde{F}_2$ ) avec un nombre d'intersection homologique non nul; ce qui est absurde par définition de  $L$ .

FAIT 3. Pour  $n_2$  suffisamment grand, tout élément de  $\mathcal{C}_i$  pour  $i = 1, 2$ , rencontre  $\tilde{F}_i$  en un unique point.

En effet, soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{C}_i$  qui rencontre deux fois  $\tilde{F}_i$ . Soit  $\delta_i$  le diamètre de  $\tilde{F}_i$ . Si  $n_2 > \frac{\delta_i}{c_2}$ , on peut tronquer  $\gamma$  et obtenir un lacet de longueur plus petite que  $L$  et rencontrant  $\tilde{F}_i$  avec un nombre d'intersection homologique non nul ; ce qui est absurde par définition de  $L$ .

Dans la suite on suppose que  $n_2$  est choisi suffisamment grand de manière à ce que les conclusions des faits 2 et 3 soient vérifiées et  $L > 2d$ . Les deux premiers points du lemme 5 sont donc démontrés.

FAIT 4. Tout lacet  $\gamma$  représenté dans  $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$  par un élément du noyau de  $p_3$  est  $d$ -réductible.

En effet un tel lacet  $\gamma$  est homotope à un lacet de  $W$  ; le fait 4 résulte donc de la définition de  $d$ .

Montrons le point 3). Montrons d'abord que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Les  $n_2 - 1$  préimages isométriques (de longueur  $\leq d$ ) de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) sont représentées par des éléments de  $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$  dont les images par  $p_3$  sont les  $b^j ab^{-j}$  (resp.  $a^j ba^{-j}$ ) pour  $j = 1, \dots, n_2 - 1$ . Donc d'après le fait 4, l'ensemble des géodésiques  $d$ -réductibles est représenté dans  $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$  par le sous-groupe  $p_3^{-1}(H)$  où  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$  contenant les  $b^j ab^{-j}$  et les  $a^j ba^{-j}$  pour  $j = 1, \dots, n_2 - 1$ . Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{C}$ . Soit  $g \in G$  l'image par  $p_3$  d'un représentant de  $\gamma$  dans  $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$ . Alors,  $g \notin H$  et, dans l'écriture réduite de  $g$  sur les générateurs de  $G$ , la somme des puissances des  $a^{n_2}$  ou des  $b^{n_2}$  est non nulle. Donc  $\gamma$  intersecte  $\tilde{F}_1$  ou  $\tilde{F}_2$  avec un nombre d'intersection homologique non nul. Comme  $\gamma$  est de longueur  $L$ , elle appartient à  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}$  i.e. que les éléments de  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  ne sont pas  $d$ -réductibles. Soit  $\gamma \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Supposons que  $\gamma$  soit une géodésique  $d$ -réductible. Alors  $\gamma$  s'écrit comme un produit libre de lacets librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que  $d$ . Mais  $\gamma$  intersecte  $\tilde{F}_1$  ou  $\tilde{F}_2$  en un unique point, donc une des géodésiques de longueur  $d$  intersecte  $\tilde{F}_1$  ou  $\tilde{F}_2$  avec un degré d'intersection homologique non nul, ce qui est impossible par minimalité de  $L$ . Le point 3) du lemme 5 est donc démontré.

Enfin le point 4) se déduit simplement du fait que tout élément de  $\mathcal{C}$  passe par un point de l'ensemble  $\tilde{f}^{-1}(s_0)$  qui est de diamètre  $\delta$ .  $\square$

**THÉORÈME 3.** Soit  $M_0$  une variété hyperbolique compacte. On suppose que  $M_0$  contient un cycle géodésique de codimension un. Alors  $M_0$  admet deux revêtements finis isospectraux mais non isométriques.

*Démonstration.* Pour construire ces deux revêtements isospectraux on va utiliser la méthode de Sunada (pour un survol introductif de l'isospectralité et en particulier de la méthode de Sunada cf. [Br1]). D'après les lemmes 4 et 5, il existe un revêtement fini  $\tilde{M}$  de  $M_0$  comme dans le lemme 5 (dans la suite on adopte les notations du lemme 5 et on suppose choisi  $L > 2\delta$ ).

On considère les graphes

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{X}/H_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{X}/H_2$$

où  $\mathcal{X}$  est le graphe de Cayley de  $\mathrm{SL}(3, 2)$  pour les générateurs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$H_1$  est le sous-groupe de  $\mathrm{SL}(3, 2)$  constitué des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ , et  $H_2$  le sous-groupe de  $\mathrm{SL}(3, 2)$  constitué des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ .

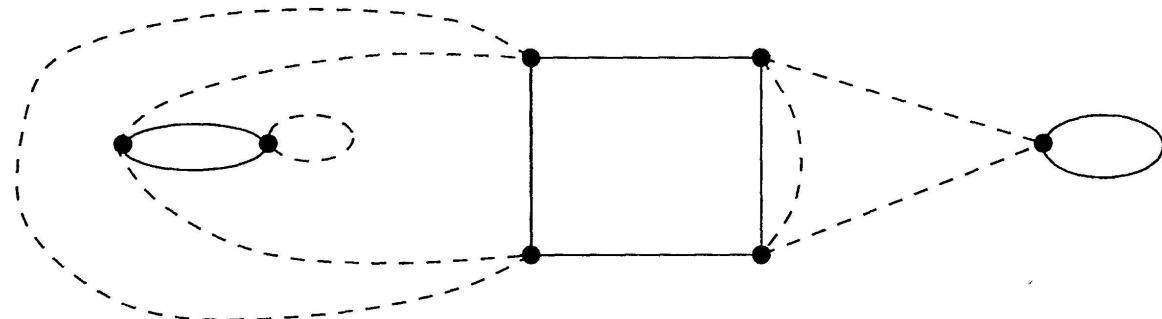


FIGURE 3  
Le graphe  $\mathcal{G}_1$

On commence par construire un revêtement régulier de  $\tilde{M}$  :  $\widehat{M}$  de groupe de Galois isomorphe à  $\mathrm{SL}(3, 2)$ . La variété  $\tilde{M}$  contient deux sous-variétés  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  auxquelles on sait associer un morphisme surjectif du groupe fondamental de  $\tilde{M}$  sur le groupe libre de rang deux qui se surjecte sur  $\mathrm{SL}(3, 2)$ . Soit donc  $p_4$  la surjection de  $\pi_1(\tilde{M})$  sur  $\mathrm{SL}(3, 2)$ . On note  $\widehat{M}$  le revêtement fini de  $\tilde{M}$  associé au sous-groupe  $p_4^{-1}(\{e\})$  de  $\pi_1(\tilde{M})$ . Le revêtement  $\widehat{M}$  peut

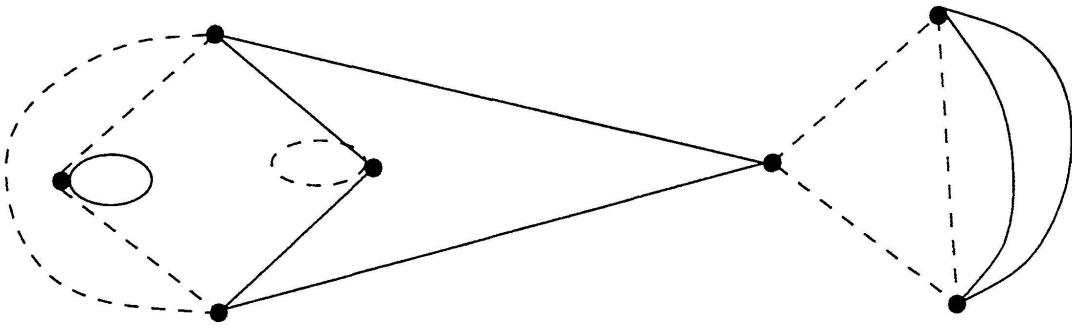


FIGURE 4  
Le graphe  $\mathcal{G}_2$

aussi s'obtenir de la même manière que dans la démonstration du lemme 5 en recollant la variété  $\tilde{M} - (\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2)$  suivant le graphe  $\mathcal{X}$ . La variété  $\tilde{M}$  ainsi obtenue admet une action de  $\mathrm{SL}(3, 2)$  par isométries de la même manière que  $\mathrm{SL}(3, 2)$  agit sur  $\mathcal{X}$ . Maintenant, soient  $\tilde{M}_1 = \tilde{M}/H_1$  et  $\tilde{M}_2 = \tilde{M}/H_2$ . Puisque l'action de  $\mathrm{SL}(3, 2)$  sur  $\tilde{M}$  est compatible avec son action sur  $\mathcal{X}$ , les variétés  $\tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}_2$  peuvent aussi être obtenues en recollant des copies de  $\tilde{M} - (\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2)$  suivant les graphes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ . On applique alors le théorème suivant.

**THÉORÈME** (Sunada [Sun]). *Soit  $G$  un groupe fini qui agit librement sur une variété riemannienne compacte  $\tilde{M}$  par isométries. Soient  $H_1, H_2 < G$  deux sous-groupes vérifiant*

$$|[g] \cap H_1| = |[g] \cap H_2|$$

*pour tout  $g \in G$  (où  $[g]$  désigne la classe de conjugaison de  $g$  dans  $G$ ). Alors les deux quotients  $M_1 = \tilde{M}/H_1$  et  $M_2 = \tilde{M}/H_2$  sont isospectraux.*

Il est classique (cf. [Br1]) que les groupes  $H_1, H_2 < G = \mathrm{SL}(3, 2)$  vérifient la condition du théorème de Sunada. On en déduit que les variétés hyperboliques  $\tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}_2$  construites ci-dessus sont isospectrales.

Pour conclure il nous reste à montrer que les variétés  $\tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}_2$  ne sont pas isométriques. Pour ce faire on compte le nombre maximal  $d_i$  de géodésiques simples de longueurs  $L$  qui ne sont pas  $d$ -réductibles et qui sont deux à deux à distance  $\leq 2L + 2\delta$  dans  $\tilde{M}_i$ .

Chaque élément  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$  admet 3 relevés dans chaque  $\tilde{M}_i$  pour  $i = 1, 2$  dont un seul lui est isométrique; on le note  $\gamma_i$ . De plus dans  $\tilde{M}_1$  il existe  $\gamma_1$  et  $\gamma'_1$  des relevés de  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}$  à distance  $\geq 3L > 2L + 2\delta$  et dans  $\tilde{M}_2$  pour tous  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma'_2$  sont à distance  $\leq 2L + 2\delta$ . Nous allons montrer

que les géodésiques  $\gamma_i$  pour  $\gamma \in \mathcal{C}$  sont les seules géodésiques fermées de longueur  $L$  qui ne sont pas  $d$ -réductibles dans  $\tilde{M}_i$  ( $i = 1, 2$ ). En particulier on aura montré que  $d_1 \neq d_2$  et donc que  $\tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}_2$  ne sont pas isométriques.

Soit  $\lambda$  une géodésique simple fermée de longueur  $L$  dans  $\tilde{M}_i$ . Si la projection de  $\lambda$  dans  $\tilde{M}$  rencontre un  $\tilde{F}_i$  avec un nombre d'intersection homologique non nul alors elle appartient à  $\mathcal{C}$  et la projection de revêtement restreinte à  $\lambda$  est une isométrie. En particulier  $\lambda = \gamma_i$  pour un certain  $\gamma \in \mathcal{C}$ . Si la projection de  $\lambda$  dans  $\tilde{M}$  rencontre chaque  $\tilde{F}_i$  avec un nombre d'intersection homologique nul, alors d'après le lemme 5 elle est  $d$ -réductible et il en est de même pour  $\lambda$ .  $\square$

De la section précédente on tire immédiatement le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 3.** *Pour tout  $n$ , il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension  $n$  (non nécessairement arithmétiques).*

La littérature sur l'isospectralité est vaste (cf. [Br1]), signalons que les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales ont été obtenus par M.-F. Vignéras [Vig] en dimension deux et trois à l'aide de variétés arithmétiques. Depuis, la méthode de Sunada a permis de construire de nombreux exemples en dimension deux. En grande dimension ( $n > 26$ ), R. Spatzier a montré [Sp], toujours à l'aide de la méthode de Sunada et à l'aide du théorème de rigidité de Mostow, que toute variété hyperbolique compacte est finiment revêtue par deux variétés hyperboliques isospectrales non isométriques. Enfin en dimension trois, A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques.

## 5. PETITES VALEURS PROPRES DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Dans cette section, on s'intéresse au problème de l'existence de petites valeurs propres.

On dira qu'une suite  $\{M_m\}$  de variétés hyperboliques converge uniformément sur tout compact vers une variété hyperbolique  $M$  si pour tout compact  $K$  de  $M$ , pour  $m$  grand, il existe un compact  $K_m \subset M_m$  isométrique à  $K$ . Signalons que cette définition est plus forte que la notion habituelle de convergence géométrique (cf. [CEG]). On appelle enfin variété tube de type  $(n, k)$  le quotient  $\mathbf{H}^n/\Lambda$  de l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$  par un réseau  $\Lambda$  de  $\text{Stab}(\mathbf{H}^k)$  agissant librement sur  $\mathbf{H}^k$ .