1. Topologie des sous-groupes d'indice fini et groupes algébriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

on applique ce lemme à la démonstration des théorèmes 1 et 2. Dans une troisième section on traite le cas des variétés non compactes de volume fini et on rappelle les diverses constructions connues de variétés hyperboliques de volume fini en constatant que ces théorèmes s'appliquent à un certain nombre d'entre elles. Dans la quatrième section on montre le théorème 3 à l'aide du théorème 2 et de la méthode de Sunada [Sun]. Dans la cinquième et dernière section, étant donné une variété hyperbolique M de volume fini on construit, à l'aide du lemme de la première section, une suite de revêtements finis de M qui converge sur tout compact vers une variété que l'on appelle *variété tube*. À l'aide de travaux de Sullivan [Sul1], on peut majorer la première valeur propre du laplacien de cette variété tube, d'où l'on déduit le théorème 4. On conclut cet article par un appendice consacré au calcul explicite du spectre des variétés tubes $\mathbf{H}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau cocompact de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ $(k < n)$. Calcul élémentaire qui permet notamment d'éviter le recours aux travaux de Sullivan dans la démonstration du théorème 4.

REMERCIEMENTS. Le théorème 3 répond à une question de R. Brooks, qui a bien voulu s'intéresser aux premières versions de cet article; je l'en remercie. La démonstration du théorème 4 doit beaucoup à l'article [BLS], qui m'a été expliqué par M. Burger; je l'en remercie. Merci à Damien Gaboriau pour sa relecture attentive. Une erreur m'a été aimablement signalée et corrigée par le referee, je l'en remercie. Enfin, je suis particulièrement redevable à J.-P. Otal pour ses nombreux conseils et encouragements.

1. TOPOLOGIE DES SOUS-GROUPES D'INDICE FINI ET GROUPES ALGÉBRIQUES

On appelle *topologie des sous-groupes d'indice fini* d'un groupe Γ (cf. [S]), la topologie sur Γ pour laquelle les sous-groupes d'indice fini de Γ forment une base de voisinages de l'élément neutre e. On peut restreindre la base de voisinages de e aux sous-groupes distingués d'indices finis de Γ (quitte à prendre l'intersection des conjugués). Notons H^* l'adhérence d'un sous-groupe H de Γ pour cette topologie, on a:

$$H^* = \bigcap_{\substack{N \lhd \Gamma \\ [\Gamma:N] < +\infty}} HN .$$

Enfin, on dit d'un groupe de type fini Γ qu'il est *résiduellement fini* si l'élément neutre de Γ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indices finis de Γ.

LEMME 1. *Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments non nuls d'un sous-anneau A de $\mathbf{C}$ finiment engendré sur $\mathbf{Z}$. Alors, il existe un corps fini F et un morphisme $\eta \colon A \longrightarrow F$ tels que pour tout i, $\eta(a_i) \neq 0$.*

Démonstration. Le théorème de normalisation de Noether (cf. [AM; p.70]) affirme qu'il existe $s \in \mathbf{Z}$, $s \neq 0$ et $x_1, \dots, x_k$ dans A qui sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{s}]$ tels que A est entier sur $B = \mathbf{Z}[\frac{1}{s}][x_1, \dots, x_k]$. Soit $a = a_1 \cdots a_n$. Soit p un entier premier qui ne divise pas s. On a un morphisme $\mathbf{Z}[\frac{1}{s}] \longrightarrow \mathbf{F}_p$ que l'on peut clairement étendre à B en envoyant les x_i sur des éléments quelconques. Puis, quitte à prendre un p plus grand, on peut supposer que les coefficients du polynôme annulateur de a sur B sont tous envoyés sur des éléments non nuls de $\mathbf{F}_p$. Ce polynôme s'envoie alors sur un polynôme sur $\mathbf{F}_p$ qui a une racine non triviale dans une certaine extension de $\mathbf{F}_p$. Ainsi, on peut étendre le morphisme $B \to \mathbf{F}_p$ en un morphisme $B[a] \longrightarrow \mathbf{F}_p(a')$ de manière à ce que l'image de a soit un élément non nul. Comme A est finiment engendré, de même manière, on peut obtenir $\eta \colon A \longrightarrow F$ où F est une extension finie de $\mathbf{F}_p$. $\square$

On a alors (cf. aussi [MS]):

LEMME PRINCIPAL. *Soient H un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ et Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ de type fini. Notons $\Lambda = H \cap \Gamma$. Alors Λ est fermé dans Γ pour la topologie des sous-groupes d'indices finis de Γ, i.e.*

$$\Lambda^* = \Lambda .$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\Lambda^* \subset H$. Soit $x \in \Gamma$; nous allons montrer que si $x \notin H$, alors $x \notin \Lambda^*$.

Puisque H est Zariski-fermé dans $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ et $x \in \mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$, il existe un polynôme P sur la variété algébrique $\mathrm{GL}_N(\mathbf{C})$ identiquement nul sur H et tel que $P(x)$ soit non nul. Le groupe Γ étant de type fini, il existe un sous-anneau A de $\mathbf{C}$ finiment engendré sur $\mathbf{Z}$ tel que Γ soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(A)$ et que P soit à coefficients dans A. Le lemme 1 implique l'existence d'un morphisme $\widetilde{\eta} \colon \mathrm{GL}_N(A) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(F)$ tel que $\overline{P}(\widetilde{\eta}(x)) \neq 0$ (où $\overline{P}$ est le polynôme à coefficients dans F obtenu en appliquant η aux coefficients de P). En se restreignant à Γ, on obtient donc un morphisme ψ de Γ dans $\mathrm{GL}_N(F)$ qui est un groupe fini. De plus, $\overline{P}(\psi(\Lambda)) = 0$ (car $\Lambda \subset H$). Donc, $\psi(x)$ n'appartient pas à $\psi(\Lambda)$. Soit alors $L = \ker \psi$. Le sous-groupe L est distingué et d'indice fini dans Γ, et $x \notin \Lambda L$ (car $\psi(\Lambda L) = \psi(\Lambda)$). Comme $\Lambda^* \subset \Lambda L$, x n'appartient pas à Λ^*. $\square$

Appliqué à $H = \{e\}$, le lemme principal redonne le fait (dû à Mal′cev [Ma]) que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini.

2. SUR LA TOPOLOGIE DES CYCLES GÉODÉSIQUES

Nous allons appliquer le lemme principal aux cycles géodésiques dans des variétés hyperboliques.

DÉFINITIONS. *Variétés hyperboliques* (cf. [Th], [CEG] ou [Rat]). Soit $\mathbf{H}^n$ l'*espace hyperbolique*, i.e. l'unique variété riemannienne de dimension n simplement connexe, complète et de courbure constante égale à -1. Une *variété hyperbolique* (de dimension n) M est une variété riemannienne complète de courbure constante égale à -1. Une telle variété est isométrique au quotient $\mathbf{H}^n/\Gamma$ de l'espace hyperbolique par un *groupe kleinien, i.e.* un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$. Par commodité, toutes les variétés hyperboliques que nous considérerons seront supposées *orientées*. Alors, $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ où Γ est un groupe kleinien contenu dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, le sous-groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbf{H}^n$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe $\mathbf{P}\mathrm{SO}(n,1)$ de $\mathrm{O}(n,1)$ (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Étant donné un groupe kleinien, on notera $L(\Gamma)$ l'*ensemble limite* de Γ, *i.e.* la fermeture, dans la sphère à l'infini $\mathbf{S}^{n-1}_\infty$, de l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de Γ dans $\mathbf{H}^n$.

THÉORÈME 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

REMARQUE. Le théorème 1 était déjà connu en dimension deux [Sc] et en dimension trois [Lo].

Démonstration. Soit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ une variété hyperbolique avec Γ un groupe kleinien de type fini. Soit $i_0 \colon F_0 \to M$ un cycle géodésique de dimension l. Soit $\widetilde{i_0} \colon \widetilde{F_0} \to \mathbf{H}^n$ un relevé de i_0 au revêtement universel $\widetilde{F_0}$ de F_0 (que l'on suppose connexe). Puisque i_0 est une immersion localement totalement géodésique, il en est de même pour $\widetilde{i_0}$. L'application i_0 est propre donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ est complet dans $\mathbf{H}^n$. Donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ coïncide avec un sous-espace