Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 109–137

PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

par Nicolas BERGERON

ABSTRACT. The notion of an l-geodesic cycle in a hyperbolic manifold generalises, in dimension l, that of a closed geodesic. In this note we study some topological properties of such cycles. Then we show that the existence of geodesic cycles of codimension 1 allows one to prove that there exist isospectral non isometric hyperbolic manifolds of every dimension. Finally, we give a simple criterion using geodesic cycles that ensures the existence of small eigenvalues of the Laplace operator in a finite cover of a hyperbolic manifold.

INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne.

DÉFINITIONS. On appelle *cycle géodésique de dimension* l dans M la donnée d'une immersion $i\colon F \to M$ d'une variété compacte F de dimension l dans M telle que pour tout x dans F, il existe un voisinage ouvert U de x dans F tel que $i(U)$ soit une sous-variété totalement géodésique de M. On dira qu'un tel cycle *se relève* à un revêtement $\widetilde{M}$ de M s'il existe un revêtement fini $\widetilde{F}$ de F auquel i se relève en une application $\widetilde{i}\colon \widetilde{F} \to \widetilde{M}$.

Dans cet article on étudie l'influence de l'existence de tels cycles dans les *variétés hyperboliques* (i.e. les variétés riemanniennes de courbure constante égale à -1), tant sur le plan topologique que géométrique. Notre premier théorème est une propriété topologique de ces cycles (une généralisation en dimension quelconque de résultats de Scott [Sc] et de Long [Lo]).

THÉORÈME 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

On connaît peu de choses sur la topologie des variétés hyperboliques. Il est donc naturel de s'intéresser dans un premier temps à leur homologie. Fixons-nous une variété hyperbolique M de volume fini de dimension n. Une conjecture attribuée, dans [Bo1], à Thurston affirme que M a un revêtement fini N avec un premier nombre de Betti non nul, $b_1(N) > 0$. Récemment, Lubotzky [Lu1] a montré, en utilisant la théorie de Bass-Serre d'actions de groupes sur les arbres, que si M contient une sous-variété (plongée) totalement géodésique de codimension 1, M vérifie la conjecture de Thurston. Lubotzky montre plus précisément que M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang 2. On peut en fait montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont deux sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Lorsque la variété ambiante est non compacte, on peut étendre le théorème 2 à des cycles généralisés de volume fini. En particulier on obtient une généralisation du théorème de Lubotzky, et les corollaires suivants (on dit d'une variété qu'elle a un premier nombre de Betti virtuel infini si pour tout entier $N > 0$, elle admet un revêtement fini avec un premier nombre de Betti supérieur à N).

COROLLAIRE 1. *Les variétés hyperboliques arithmétiques construites par Borel dans* [Bo2] *ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

COROLLAIRE 2. *Les variétés hyperboliques non arithmétiques construites par Vinberg dans* [Vin] *ou par Gromov et Piateski-Shapiro dans* [GPS] *ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

L'existence de cycles géodésiques dans M a aussi des conséquences pour le spectre de M et de ses revêtements.

Notre troisième théorème est le suivant:

THÉORÈME 3. *Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension n. Si M contient un cycle géodésique de dimension $n-1$, alors M admet deux revêtements finis M_1 et M_2 isospectraux mais non isométriques.*

COROLLAIRE 3. *Pour tout n, il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension n (non nécessairement arithmétiques).*

Les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques ont été construits par M.-F. Vignéras [Vig] en dimensions 2 et 3; ce sont des variétés arithmétiques. R. Spatzier dans [Sp] a montré que pour $n > 26$ toute variété hyperbolique vérifie les conclusions du théorème 3. Enfin récemment A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques en dimension 3.

Dans [R], Randol pose le problème de l'existence de variétés hyperboliques compactes avec de *petites valeurs propres*, *i.e.* des valeurs propres du laplacien inférieures à $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$. L'existence de telles valeurs propres influe notamment sur le comportement asymptotique du nombre $N_T(x,y)$ (pour T proche de l'infini) de points de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ appartenant à la boule hyperbolique centrée en x de rayon T et se projetant dans M sur le même point que y. Randol montre par exemple que, pour $n = 3$, la variance de $N_T(x,y)$ est, pour T proche de l'infini, de l'ordre de $\frac{e^{(1+\alpha)T}}{\alpha(1+\alpha^2)}$ (à une constante près et pour un certain $\alpha = \alpha(M) \in]0,1[$) si M a de petites valeurs propres et est un $O(Te^T)$ sinon. Dans [R], Randol montre qu'une variété hyperbolique qui a un premier nombre de Betti non nul admet un revêtement fini avec de petites valeurs propres (en fait arbitrairement petites). On peut démontrer un critère simple d'existence de petites valeurs propres dans un revêtement fini.

THÉORÈME 4. *Si M contient un cycle géodésique de dimension $k > \frac{n+1}{2}$, alors M admet un revêtement fini avec de petites valeurs propres.*

Ce critère simple permet notamment de montrer que toutes les variétés hyperboliques compactes connues de dimension $n \geq 6$ ($n \neq 7$) admettent des revêtements finis avec de petites valeurs propres, sans faire appel aux difficiles avancées vers la conjecture de Thurston.

Organisation de l'article. La première section est consacrée à la démonstration d'un lemme « à la Selberg » qui généralise le fait que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini. Dans une deuxième section,

on applique ce lemme à la démonstration des théorèmes 1 et 2. Dans une troisième section on traite le cas des variétés non compactes de volume fini et on rappelle les diverses constructions connues de variétés hyperboliques de volume fini en constatant que ces théorèmes s'appliquent à un certain nombre d'entre elles. Dans la quatrième section on montre le théorème 3 à l'aide du théorème 2 et de la méthode de Sunada [Sun]. Dans la cinquième et dernière section, étant donné une variété hyperbolique M de volume fini on construit, à l'aide du lemme de la première section, une suite de revêtements finis de M qui converge sur tout compact vers une variété que l'on appelle *variété tube*. À l'aide de travaux de Sullivan [Sul1], on peut majorer la première valeur propre du laplacien de cette variété tube, d'où l'on déduit le théorème 4. On conclut cet article par un appendice consacré au calcul explicite du spectre des variétés tubes $\mathbf{H}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau cocompact de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ $(k < n)$. Calcul élémentaire qui permet notamment d'éviter le recours aux travaux de Sullivan dans la démonstration du théorème 4.

REMERCIEMENTS. Le théorème 3 répond à une question de R. Brooks, qui a bien voulu s'intéresser aux premières versions de cet article; je l'en remercie. La démonstration du théorème 4 doit beaucoup à l'article [BLS], qui m'a été expliqué par M. Burger; je l'en remercie. Merci à Damien Gaboriau pour sa relecture attentive. Une erreur m'a été aimablement signalée et corrigée par le referee, je l'en remercie. Enfin, je suis particulièrement redevable à J.-P. Otal pour ses nombreux conseils et encouragements.

1. TOPOLOGIE DES SOUS-GROUPES D'INDICE FINI ET GROUPES ALGÉBRIQUES

On appelle *topologie des sous-groupes d'indice fini* d'un groupe Γ (cf. [S]), la topologie sur Γ pour laquelle les sous-groupes d'indice fini de Γ forment une base de voisinages de l'élément neutre e. On peut restreindre la base de voisinages de e aux sous-groupes distingués d'indices finis de Γ (quitte à prendre l'intersection des conjugués). Notons H^* l'adhérence d'un sous-groupe H de Γ pour cette topologie, on a:

$$H^* = \bigcap_{\substack{N \lhd \Gamma \\ [\Gamma:N] < +\infty}} HN.$$

Enfin, on dit d'un groupe de type fini Γ qu'il est *résiduellement fini* si l'élément neutre de Γ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indices finis de Γ.