

# 7. EXPLICIT COMPUTATIONS AND CUBIC TRACE FORMS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

With this notation we have a commutative square

$$(32) \quad \begin{array}{ccc} H_{\mathbb{R}}^1(X, \mu_3) & \xrightarrow{i_*} & \text{Pic}(C)[3] \\ f \downarrow & & j \uparrow \\ \mathcal{S}(C) & \xrightarrow{e'} & H(C)[3] \end{array}$$

where  $j: H(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$  is the natural homomorphism  $[M, q, N] \mapsto [M]$ . Kneser [11, §6] has shown that  $j$  is an isomorphism (see also Section 2), so the two vertical maps in (32) are bijections and the horizontal maps are surjections.

Note that because of the exact sequence (31), the fibers of  $e'$  are in one-to-one correspondence with the elements of the group  $C^\times / C^{\times 3}$ . This is, of course, equivalent to Theorem 5.2, Part (ii).

### 7. EXPLICIT COMPUTATIONS AND CUBIC TRACE FORMS

In this section we assume that  $A := C \otimes K$  is a quadratic étale algebra over  $K$ . In this case the trace form  $(x, y) \rightarrow \text{Tr}_{A/K}(xy)$  is nondegenerate and gives rise to a natural isomorphism between the codifferent

$$C' = \{x \in A : \text{Tr}_{A/K}(xC) \subset R\}$$

and the dual  $C^*$ . If  $M$  is a fractional  $C$ -ideal with  $M^3 \simeq C'$ , then, by Theorem 5.1, the cubic forms on  $M$  with primitive determining form are given by

$$(33) \quad F_u(\mathbf{x}) = \text{Tr}_{A/K}(uax^3),$$

where  $a \in A$  is a fixed element with  $aM^3 = C'$ , and  $u$  is a unit of  $C$ . Moreover, by Theorem 5.1, two such forms  $F_u$  and  $F_v$  are  $C$ -isomorphic if and only if  $u$  and  $v$  represent the same element of  $C^\times / (C^\times)^3$ .

We shall compute explicitly some examples for  $R = \mathbf{Z}$  using (33). In this case we have  $C = \mathbf{Z}[t]/(f(t))$ , where  $f$  is a monic degree-two polynomial with distinct roots and coefficients in  $\mathbf{Z}$ .

Let  $\omega$  be the class of  $t$  in  $C$ . It is well-known, and easy to prove, that the codifferent  $C'$  is a principal fractional  $C$ -ideal generated by  $f'(\omega)^{-1}$ , where  $f'$  is the derivative of  $f$ . Hence,  $[C^*]$  is trivial in  $\text{Pic}(C)$  (note that this holds more generally provided  $\text{Pic}(R) = 0$ ).

EXAMPLE 7.1. Let  $C = \mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$  (note that 23 is the smallest square-free positive integer  $N$  such that  $A = \mathbf{Q}(\sqrt{-N})$  has class number divisible by 3; in fact  $\text{Pic}(C) \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  (see [2]). The class group  $\text{Pic}(C)$  is generated by the class of

$$M = 2\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z},$$

where  $\omega = \frac{1+\sqrt{-23}}{2}$ . Thus the three classes of  $\text{Pic}(C)$  are represented by the ideals  $C$ ,  $M$  and  $\bar{M}$ . The quadratic forms attached to  $C$ ,  $M$  and  $\bar{M}$  are respectively

$$x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2, \quad 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2, \quad 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2.$$

One verifies also that  $\theta = \omega - 2$  satisfies  $M^3 = \theta C$ , thus  $(1/\theta\sqrt{-23})M^3 = C'$ . Hence, by (33), the cubic  $C$ -form on  $M$  is given by

$$F(\mathbf{x}) = \text{Tr} \left( \frac{\mathbf{x}^3}{\theta\sqrt{-23}} \right),$$

where  $\mathbf{x} = 2x_1 + x_2\omega$ . Similar computations can be done for  $\bar{M}$  (taking  $\theta = -1 - \omega$  and the  $\mathbf{Z}$ -basis  $\{2, -1 + \omega\}$ ) and for  $C$  (with the basis  $\{1, \omega\}$ ). The following table summarizes the results of these computations:

Module	Cubic Form	Determining Form
$M$	$-x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 2x_2^3$	$2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$
$\bar{M}$	$x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 + 2x_2^3$	$2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2$
$C$	$x_2(3x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2^2)$	$x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2$

EXAMPLE 7.2. Let  $C = \mathbf{Z}[\sqrt{79}]$ . Here also  $\text{Pic}(C) \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  (see [2]) (in fact 79 is the smallest square-free positive integer  $N$  such that  $\mathbf{Q}(\sqrt{N})$  has class number divisible by 3).

The class group  $\text{Pic}(C)$  is generated by the class of

$$M = 9\mathbf{Z} + (4 + \sqrt{79})\mathbf{Z}.$$

Thus the three classes of  $\text{Pic}(C)$  are represented by the ideals  $C$ ,  $M$  and  $\bar{M}$ . One verifies also that  $\alpha = 52 - 5\sqrt{79}$  satisfies  $M^3 = \alpha C$ , thus  $(1/2\alpha\sqrt{79})M^3 = C'$ . The fundamental unit of  $C$  is  $\tau = 80 + 9\sqrt{79}$ ; hence, by (33), the three nonisomorphic cubic  $C$ -forms on  $M$  are given by

$$F_{\tau^k}(\mathbf{x}) = \text{Tr} \left( \frac{\tau^k}{2\alpha\sqrt{79}} \mathbf{x}^3 \right),$$

where  $\mathbf{x} = 9x_1 + (4 + \sqrt{79})x_2$  and  $k = -1, 0, 1$ . Similar computations can be done for  $\bar{M}$  (taking the  $\mathbf{Z}$ -basis  $\{9, -4 + \sqrt{79}\}$ ) and  $C$  (with the natural basis  $\{1, \sqrt{79}\}$ ).

Module	Cubic Forms	Determining Form
$M$	$-68x_1^3 + 111x_1^2x_2 - 60x_1x_2^2 + 11x_2^3$ $5x_1^3 + 24x_1^2x_2 + 33x_1x_2^2 + 16x_2^3$ $868x_1^3 + 3729x_1^2x_2 + 5340x_1x_2^2 + 2549x_2^3$	$9x_1^2 + 8x_1x_2 - 7x_2^2$
$\bar{M}$	$-868x_1^3 + 3729x_1^2x_2 - 5340x_1x_2^2 + 2549x_2^3$ $-5x_1^3 + 24x_1^2x_2 - 33x_1x_2^2 + 16x_2^3$ $68x_1^3 + 111x_1^2x_2 + 60x_1x_2^2 + 11x_2^3$	$9x_1^2 - 8x_1x_2 - 7x_2^2$
$C$	$-9x_1^3 + 240x_1^2x_2 - 2133x_1x_2^2 + 6320x_2^3$ $3x_1^2x_2 + 79x_2^3$ $9x_1^3 + 240x_1^2x_2 + 2133x_1x_2^2 + 6320x_2^3$	$x_1^2 - 79x_2^2$

REFERENCES

[1] ARNDT, F. Zur Theorie der binären kubischen Formen. *J. Crelle* 53 (1857), 309–321.

[2] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.

[3] CAYLEY, A. Two letters on cubic forms. *Quarterly Math. J.* 1 (1857), 85–87, 90–91 = *Collected Mathematical Papers*, vol. 3, 9–12, Cambridge Univ. Press, 1890.

[4] DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers*, vol. III. Chelsea, 1952.

[5] — On invariants and the theory of numbers. *The Madison Colloquium*. Dover Publications, New York, 1966.

[6] EISENSTEIN, G. Théorèmes sur les formes cubiques et solution d’une équation du quatrième degré à quatre indéterminées. *J. Crelle* 27 (1844), 75–79 = *Mathematische Werke*, Band I, Chelsea Publ. Co., 1975, 1–5.

[7] — Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln. *J. Crelle* 27 (1844), 89–104 = *Mathematische Werke*, Band I, Chelsea Publ. Co., 1975, 10–25.

[8] HERMITE, C. Lettre à Cayley sur les formes cubiques. *Œuvres*, tome 1, 437–439, Gauthier-Villars, 1905.