

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 6. QUESTIONS OUVERTES

1. Pour autant que nous le sachions, la non-inclusion

$$L^\infty(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}(W^1(L^\infty(\mathbf{R}^2))),$$

ne se ramène pas, comme c'est le cas pour  $L^1$ , à des observations élémentaires sur les plongements de Sobolev.

2. Le théorème 4 laisse ouvert le problème d'une description explicite simple des espaces fonctionnels  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n)))$  et  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ .

3. Dans le même ordre d'idée, on vérifie facilement que les EBD

$$E_m = W^m(W^{-m}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \quad (m \geq 0)$$

forment une suite croissante de sous-espaces de  $bmo(\mathbf{R}^n)$ . Cette suite est-elle *strictement* croissante ? Peut-on décrire simplement le sous-espace  $\bigcup_{m \geq 0} E_m$  ? Des questions homologues se posent pour la suite décroissante

$$W^{-m}(W^m(L^1(\mathbf{R}^n))) \quad (m \geq 0)$$

de sous-espaces de  $L^1(\mathbf{R}^n)$ .

4. On peut conjecturer une réciproque de la proposition 5 : *si E possède la propriété de Mitiagin-Ornstein, alors  $E = W^1(W^{-1}(E))$*  ; cela reviendrait à dire que  $W^1(W^{-1}(E))$  est le plus petit EBD incluant  $E$  et possédant la propriété de Mitiagin-Ornstein.

5. Peut-on trouver une «bonne» échelle de régularité d'origine  $L^1$  ? Pour préciser la question, désignons par  $\mathcal{E}$  la classe de tous les EBD de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ . Existe-t-il une famille  $(S^m)_{m \in \mathbf{Z}}$  d'applications de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  telle que :

- pour tout  $E \in \mathcal{E}$ ,  $(S^m(E))_{m \in \mathbf{Z}}$  est une échelle de régularité d'origine  $E$ ,
- $S^{m+k}(L^1(\mathbf{R}^n)) = S^m(S^k(L^1(\mathbf{R}^n)))$  pour tout  $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$  ?

## RÉFÉRENCES

- [1] AMREIN, W.O., BOUTET DE MONVEL, A. et GEORGESCU, V.  *$C_0$ -Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*. Birkhäuser, 1996.
- [2] BOMAN, J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables. *Illinois J. Math.* 16 (1972), 203–216.
- [3] BOURDAUD, G. *Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien*. Publ. Math. Univ. Paris VII, 23 (1987, 1995).

- [4] GOLDBERG, D. A local version of real Hardy spaces. *Duke Math. J.* 46 (1979), 27–42.
- [5] MITIAGIN, B. S. On the second mixed derivative. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 123 (1958), 606–609 (en russe).
- [6] ORNSTEIN, D. A non-inequality for differential operators in the  $L_1$  norm. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11 (1962), 40–49.
- [7] STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, 1970.
- [8] TRIEBEL, H. *Theory of Function Spaces II*. Birkhäuser, 1992.
- [9] WOJCIECHOWSKI, M. Non-inequalities of Ornstein type in partial derivatives. Séminaire d'Initiation à l'Analyse, Paris VI (1992–93).

(Reçu le 29 février 2000)

Gérard Bourdaud

Université Pierre et Marie Curie  
 Équipe d'Analyse  
 Case 186  
 4, place Jussieu  
 F-75252 Paris Cedex 05  
 France  
*e-mail* : bourdaud@math.jussieu.fr

Michał Wojciechowski

Institute of Mathematics  
 Polish Academy of Sciences  
 ul. Śniadeckich 8, I p.  
 PL-00-950 Warszawa  
 Poland  
*e-mail* : miwoj@impan.gov.pl