Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE
Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha
Kapitel: 5. Pour aller plus loin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64803

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)\,,$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2)\,;$$

or $W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)$ est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans $BMO(\mathbf{R}^2)$ et non dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

5. Pour aller plus loin

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{R}^n)$ et son dual $BMO(\mathbf{R}^n)$ sont considérés comme des substituts naturels de $L^1(\mathbf{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. $BMO(\mathbf{R}^n)$ n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations $h^1(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n)$ et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel; on a en effet $h^1(\mathbf{R}^n) = F^0_{12}(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n) = F^0_{\infty 2}(\mathbf{R}^n)$ (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les F^s_{pq}, on obtient $W^m(E) = (I-\Delta)^{-m/2}(E)$ pour $E = h^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = bmo(\mathbf{R}^n)$, de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

Théorème 4. *Pour $n > 1$, on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1\big(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))\big) \subset bmo(\mathbf{R}^n)\,,$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))\big) \subset L^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

et ces quatre inclusions sont strictes.

Preuve. Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que $h^1(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace propre de $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$. Quelques rappels sur h^1 seront d'abord utiles. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^*)$ une fonction telle que

$$\forall \xi \neq 0 \quad : \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \psi(2^j \xi) = 1 \, ;$$

on dispose de l'équivalence de normes

$$\|u\|_{h^1(\mathbf{R})} \approx \|u\|_1 + \Big\| \Big(\sum_{j \geq 1} \big| \psi(2^{-j}D)(u) \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1$$

(voir par exemple [8]). Posons

$$\Psi(\xi, \eta) = \rho(\xi)\psi(\eta) \qquad (\xi \in \mathbf{R}^{n-1} \, , \ \eta \in \mathbf{R}) \, ;$$

alors $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ de sorte que, pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$\Big\| \Big(\sum_{j \geq 1} \big| \Psi(2^{-j}D)(f) \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1 \leq C \, \|f\|_{h^1(\mathbf{R}^n)} \, . \tag{8}$$

Soit $\theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ la fonction dont la transformée de Fourier est ρ ; soit u une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, n'appartenant pas à $h^1(\mathbf{R})$; soit enfin

$$f(x, y) = \theta(x) u(y) \qquad (x \in \mathbf{R}^{n-1} \, , \ y \in \mathbf{R}) \, .$$

D'après le théorème 3, il existe $v \in W^1(L^1(\mathbf{R}))$ tel que $u = v + v'$; cela nous donne

$$f = \theta \otimes v + \partial_n(\theta \otimes v) \, ,$$

avec $\theta \otimes v \in W^1(L^1(\mathbf{R}^n))$, d'où $f \in W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$. Puisque $\rho(2^{-j}\xi)\,\rho(\xi) = \rho(\xi)$ pour $j \geq 1$, il vient

$$\Psi(2^{-j}D)(f) = \theta \otimes \psi(2^{-j}D)(u) \, .$$

Si la fonction f appartenait à $h^1(\mathbf{R}^n)$, l'estimation (8) nous donnerait

$$\|\theta\|_1 \Big\| \Big(\sum_{j \geq 1} \big| \psi(2^{-j}D)(u) \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1 < +\infty \, ,$$

d'où $u \in h^1(\mathbf{R})$, ce qui contredit l'hypothèse.