

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kapitel:** 2.2 Échelles de régularité  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Si  $E' \subset F'$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $u \in E'$ ,

$$\|u\|_{F'} \leq C \|u\|_{E'};$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup \{ |\langle u, g \rangle| : u \in E', \|u\|_{E'} \leq 1 \},$$

il vient  $\|g\|_E \leq C \|g\|_F$  pour tout  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , ce qui, par densité, entraîne  $F \subset E$ .

## 2.2 ÉCHELLES DE RÉGULARITÉ

DÉFINITION 1. Une suite  $(E^m)_{m \in \mathbf{Z}}$  d'EBD est une *échelle de régularité* si, pour tous  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j = 1, \dots, n$ :

$$(i) \quad E^{m+1} \subset E^m \quad \text{et} \quad (ii) \quad \partial_j(E^{m+1}) \subset E^m.$$

$E^0$  est appelé l'*origine* de l'échelle.

Si  $E$  est un EBD donné, il existe au moins une échelle de régularité d'origine  $E$ : c'est l'échelle de Sobolev définie par (1) et (2); on vérifie en effet ([3]) que  $W^m(E)$  et  $W^{-m}(E)$  sont des EBD pour les normes respectives:

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E,$$

$$\|f\|_{W^{-m}(E)} = \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_E : f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)} \right\}.$$

Dès que l'espace  $E$  est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de  $\mathbf{R}^n$ , l'espace  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

PROPOSITION 2. On a  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ , quel que soit  $E$ , dès que les entiers  $m$  et  $k$  sont de même signe.

*Preuve.* Elle repose sur la remarque élémentaire suivante: si  $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$  et si l'entier  $m$  vérifie  $0 < m < |\alpha|$ , il existe  $\beta \in \mathbf{N}^n$  tel que  $\beta < \alpha$  et  $|\beta| = m$ . Les détails sont laissés au lecteur.

DÉFINITION 2. L'échelle de Sobolev d'origine  $E$  est dite *invariante* si elle vérifie la propriété (3), ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à:

$$(5) \quad W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)) \quad (m > 0, k > 0).$$