Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

Autor: Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64803

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 325–338

ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

RÉSUMÉ. A tout espace fonctionnel $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ est associée classiquement l'*échelle de Sobolev* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. La propriété $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ est connue pour être vraie si $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ou si $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. Nous montrons qu'elle est en défaut pour $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, en dimension $n \geq 2$. Plus précisément, nous établissons que E est un sous-espace propre de $W^1(W^{-1}(E))$, et $W^{-1}(W^1(E))$ un sous-espace propre de E.

ABSTRACT. *Sobolev scales with arbitrary origin.*
For every functional space $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, one considers classically the *Sobolev scale* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. The property $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ is known to be true for $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ or $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. We show that it is false for $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ and $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, with $n \geq 2$. More precisely, we prove that E is a proper subspace of $W^1(W^{-1}(E))$, and $W^{-1}(W^1(E))$ a proper subspace of E.

1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (ou de $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$), on peut associer l'*échelle de Sobolev d'origine* E ; c'est la famille $\big(W^m(E)\big)_{m \in \mathbf{Z}}$ telle que :

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\}\,, \tag{1}$$

$$W^{-m}(E) = \Big\{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \exists f_\alpha \in E\,, \quad f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\Big\}\,, \tag{2}$$

pour tout $m \in \mathbf{N}$. Est-il vrai que n'importe lequel des $W^m(E)$ puisse être pris comme origine de l'échelle ? En d'autres termes, la propriété

$$\forall\,(m,k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E)) \tag{3}$$

est-elle satisfaite par l'espace E ? La réponse est positive pour $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$; il suffit d'observer que

$$W^m\left(L^p(\mathbf{R}^n)\right) = (I-\Delta)^{-m/2}\left(L^p(\mathbf{R}^n)\right)\,, \tag{4}$$

où Δ est le laplacien. L'identité (4) est une conséquence classique du théorème des multiplicateurs de Hörmander-Mihlin (voir par exemple [3]). Les espaces $L^1(\mathbf{R})$ et $L^\infty(\mathbf{R})$ satisfont également (3); il s'agit d'une propriété fort générale des espaces invariants par translation en dimension 1, dont nous rappellerons la démonstration au paragraphe 3.

La question de savoir si les espaces $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ $(n > 1)$ vérifient (3) était ouverte jusqu'à ce que, très récemment, M. Wojciechowski [9] démontre que $W^{-1}\left(W^1(L^1(\mathbf{T}^2))\right)$ est un sous-espace propre de $L^1(\mathbf{T}^2)$; en d'autres termes: que certaines fonctions $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$ ne peuvent s'exprimer sous la forme

$$f(x,y) = f_0(x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,,$$

où les fonctions f_j appartiennent à $W^1(L^1(\mathbf{T}^2))$.

Il se trouve que le théorème de Wojciechowski est en fait la conséquence directe de propriétés classiques des espaces de Sobolev. Une première façon de le voir consiste à passer par l'intermédiaire de l'espace $BV(\mathbf{R}^2)$ des fonctions à variation bornée. On sait en effet que $BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$ et on voit facilement que $L^1(\mathbf{R}^2)$ n'est pas inclus dans $W^{-1}(L^2(\mathbf{R}^2))$.

Une seconde approche consiste à traiter le problème dual; autrement dit: à prouver que L^∞ est un sous-espace propre de $W^1\left(W^{-1}(L^\infty)\right)$. Pour ce faire, il suffit de disposer d'une fonction $g \in L^\infty$ telle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \notin L^\infty\,,$$

alors que *les autres* dérivées d'ordre 1 et 2 appartiennent à L^∞ ; dans ce cas, on voit facilement que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \in W^1\left(W^{-1}(L^\infty)\right)\,,$$

et le tour est joué. Or l'existence d'une telle fonction g a été établie par Mitiagin, il y a une quarantaine d'années ([5], voir aussi [2]); pour sa part, Ornstein ([6], [9]) a construit une fonction jouant le même rôle dans L^1. Cela nous conduit à notre principal résultat:

THÉORÈME 1. *Pour $n > 1$,*

(i) $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \not\subset L^\infty(\mathbf{R}^n)$, (ii) $L^1(\mathbf{R}^n) \not\subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$,

(iii) $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^n))) \not\subset L^1(\mathbf{R}^n)$, (iv) $L^\infty(\mathbf{R}^n) \not\subset W^{-1}(W^1(L^\infty(\mathbf{R}^n)))$.

Avant d'y parvenir, il nous faudra faire quelques rappels sur les espaces de Banach de distributions, en particulier sur leur dualité, et traiter le cas très particulier de la dimension 1.

NOTATIONS. Choisissons une fois pour toutes les fonctions usuelles de *troncation* et de *régularisation*. Ce sont des fonctions positives $\rho, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\rho(x) = 1 \quad (\text{pour } |x| \leq 1/2)\,, \qquad \rho(x) = 0 \quad (\text{pour } |x| \geq 1)\,, \qquad \int \varphi(x)\, dx = 1\,;$$

nous poserons

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x}{k}\right), \qquad \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)\,.$$

Les opérateurs de *translation* et de *dilatation* sont définis par:

$$\tau_t f(x) = f(x-t) \quad (t \in \mathbf{R}^n)\,, \quad h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0).$$

On pose enfin $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

2. LES ESPACES DE BANACH DE DISTRIBUTIONS

2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Si E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, on dit que E est un *espace de Banach de distributions* (EBD). Notons d'ailleurs que toute injection canonique $E \hookrightarrow F$ entre deux EBD est nécessairement continue; c'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé. En particulier, un sous-espace donné de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ possède *au plus une* structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

PROPOSITION 1. *Si E est un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors E' s'identifie à un EBD. Si E et F sont des EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors $E' = F'$ si et seulement si $E = F$.*

Preuve. Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans E, l'application de restriction $u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$ est linéaire, injective et continue de E' dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, de sorte qu'on peut identifier E' avec le sous-espace suivant de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \exists\, C > 0\,, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\,, \quad |\langle u, g\rangle| \leq C\, \|g\|_E\}\,.$$