

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**Kurzfassung**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

**RÉSUMÉ.** A tout espace fonctionnel  $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  est associée classiquement l'échelle de Sobolev  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ). La propriété  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$  ( $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$ ) est connue pour être vraie si  $E = L^p(\mathbf{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ou si  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $n \geq 2$ ). Nous montrons qu'elle est en défaut pour  $E = L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ , en dimension  $n \geq 2$ . Plus précisément, nous établissons que  $E$  est un sous-espace propre de  $W^1(W^{-1}(E))$ , et  $W^{-1}(W^1(E))$  un sous-espace propre de  $E$ .

**ABSTRACT.** *Sobolev scales with arbitrary origin.*

For every functional space  $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , one considers classically the Sobolev scale  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ). The property  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$  ( $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$ ) is known to be true for  $E = L^p(\mathbf{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) or  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $n \geq 2$ ). We show that it is false for  $E = L^1(\mathbf{R}^n)$  and  $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ , with  $n \geq 2$ . More precisely, we prove that  $E$  is a proper subspace of  $W^1(W^{-1}(E))$ , and  $W^{-1}(W^1(E))$  a proper subspace of  $E$ .

### 1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  (ou de  $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$ ), on peut associer l'échelle de Sobolev d'origine  $E$ ; c'est la famille  $(W^m(E))_{m \in \mathbf{Z}}$  telle que :

$$(1) \quad W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\},$$

$$(2) \quad W^{-m}(E) = \left\{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists f_\alpha \in E, \quad f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\right\},$$

pour tout  $m \in \mathbf{N}$ . Est-il vrai que n'importe lequel des  $W^m(E)$  puisse être pris comme origine de l'échelle ? En d'autres termes, la propriété

$$(3) \quad \forall (m, k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$$

est-elle satisfaite par l'espace  $E$  ? La réponse est positive pour  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < +\infty$ ); il suffit d'observer que