

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE  
**Autor:** Bourdaud, Gérard / WOJCIECHOWSKI, Micha  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64803>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

RÉSUMÉ. A tout espace fonctionnel  $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  est associée classiquement l'échelle de Sobolev  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ). La propriété  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$  ( $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$ ) est connue pour être vraie si  $E = L^p(\mathbf{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ou si  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $n \geq 2$ ). Nous montrons qu'elle est en défaut pour  $E = L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ , en dimension  $n \geq 2$ . Plus précisément, nous établissons que  $E$  est un sous-espace propre de  $W^1(W^{-1}(E))$ , et  $W^{-1}(W^1(E))$  un sous-espace propre de  $E$ .

ABSTRACT. *Sobolev scales with arbitrary origin.*

For every functional space  $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , one considers classically the *Sobolev scale*  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ). The property  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$  ( $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$ ) is known to be true for  $E = L^p(\mathbf{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) or  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $n \geq 2$ ). We show that it is false for  $E = L^1(\mathbf{R}^n)$  and  $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$ , with  $n \geq 2$ . More precisely, we prove that  $E$  is a proper subspace of  $W^1(W^{-1}(E))$ , and  $W^{-1}(W^1(E))$  a proper subspace of  $E$ .

### 1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  (ou de  $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$ ), on peut associer l'échelle de Sobolev d'origine  $E$ ; c'est la famille  $(W^m(E))_{m \in \mathbf{Z}}$  telle que :

$$(1) \quad W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\},$$

$$(2) \quad W^{-m}(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists f_\alpha \in E, \quad f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\},$$

pour tout  $m \in \mathbf{N}$ . Est-il vrai que n'importe lequel des  $W^m(E)$  puisse être pris comme origine de l'échelle ? En d'autres termes, la propriété

$$(3) \quad \forall (m, k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$$

est-elle satisfaite par l'espace  $E$  ? La réponse est positive pour  $E = L^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 < p < +\infty$ ); il suffit d'observer que

$$(4) \quad W^m(L^p(\mathbf{R}^n)) = (I - \Delta)^{-m/2}(L^p(\mathbf{R}^n)),$$

où  $\Delta$  est le laplacien. L'identité (4) est une conséquence classique du théorème des multiplicateurs de Hörmander-Mihlin (voir par exemple [3]). Les espaces  $L^1(\mathbf{R})$  et  $L^\infty(\mathbf{R})$  satisfont également (3); il s'agit d'une propriété fort générale des espaces invariants par translation en dimension 1, dont nous rappellerons la démonstration au paragraphe 3.

La question de savoir si les espaces  $E = L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$  ( $n > 1$ ) vérifient (3) était ouverte jusqu'à ce que, très récemment, M. Wojciechowski [9] démontre que  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{T}^2)))$  est un sous-espace propre de  $L^1(\mathbf{T}^2)$ ; en d'autres termes: que certaines fonctions  $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$  ne peuvent s'exprimer sous la forme

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y),$$

où les fonctions  $f_i$  appartiennent à  $W^1(L^1(\mathbf{T}^2))$ .

Il se trouve que le théorème de Wojciechowski est en fait la conséquence directe de propriétés classiques des espaces de Sobolev. Une première façon de le voir consiste à passer par l'intermédiaire de l'espace  $BV(\mathbf{R}^2)$  des fonctions à variation bornée. On sait en effet que  $BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$  et on voit facilement que  $L^1(\mathbf{R}^2)$  n'est pas inclus dans  $W^{-1}(L^2(\mathbf{R}^2))$ .

Une seconde approche consiste à traiter le problème dual; autrement dit: à prouver que  $L^\infty$  est un sous-espace propre de  $W^1(W^{-1}(L^\infty))$ . Pour ce faire, il suffit de disposer d'une fonction  $g \in L^\infty$  telle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \notin L^\infty,$$

alors que *les autres* dérivées d'ordre 1 et 2 appartiennent à  $L^\infty$ ; dans ce cas, on voit facilement que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \in W^1(W^{-1}(L^\infty)),$$

et le tour est joué. Or l'existence d'une telle fonction  $g$  a été établie par Mitiagin, il y a une quarantaine d'années ([5], voir aussi [2]); pour sa part, Ornstein ([6], [9]) a construit une fonction jouant le même rôle dans  $L^1$ . Cela nous conduit à notre principal résultat:

THÉORÈME 1. *Pour  $n > 1$ ,*

- (i)  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \not\subset L^\infty(\mathbf{R}^n),$       (ii)  $L^1(\mathbf{R}^n) \not\subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))),$
- (iii)  $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^n))) \not\subset L^1(\mathbf{R}^n),$       (iv)  $L^\infty(\mathbf{R}^n) \not\subset W^{-1}(W^1(L^\infty(\mathbf{R}^n))).$

Avant d'y parvenir, il nous faudra faire quelques rappels sur les espaces de Banach de distributions, en particulier sur leur dualité, et traiter le cas très particulier de la dimension 1.

**NOTATIONS.** Choisissons une fois pour toutes les fonctions usuelles de *troncation* et de *régularisation*. Ce sont des fonctions positives  $\rho, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  telles que

$$\rho(x) = 1 \quad (\text{pour } |x| \leq 1/2), \quad \rho(x) = 0 \quad (\text{pour } |x| \geq 1), \quad \int \varphi(x) dx = 1;$$

nous poserons

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x}{k}\right), \quad \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx).$$

Les opérateurs de *translation* et de *dilatation* sont définis par :

$$\tau_t f(x) = f(x - t) \quad (t \in \mathbf{R}^n), \quad h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0).$$

On pose enfin  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ .

## 2. LES ESPACES DE BANACH DE DISTRIBUTIONS

### 2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Si  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique  $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , on dit que  $E$  est un *espace de Banach de distributions* (EBD). Notons d'ailleurs que toute injection canonique  $E \hookrightarrow F$  entre deux EBD est nécessairement continue; c'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé. En particulier, un sous-espace donné de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  possède au plus une structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

**PROPOSITION 1.** *Si  $E$  est un EBD incluant  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  comme sous-espace dense, alors  $E'$  s'identifie à un EBD. Si  $E$  et  $F$  sont des EBD incluant  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  comme sous-espace dense, alors  $E' = F'$  si et seulement si  $E = F$ .*

*Preuve.* Si  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  est dense dans  $E$ , l'application de restriction  $u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$  est linéaire, injective et continue de  $E'$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ , de sorte qu'on peut identifier  $E'$  avec le sous-espace suivant de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists C > 0, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), |\langle u, g \rangle| \leq C \|g\|_E\}.$$

Si  $E' \subset F'$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $u \in E'$ ,

$$\|u\|_{F'} \leq C \|u\|_{E'};$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup \{ |\langle u, g \rangle| : u \in E', \|u\|_{E'} \leq 1 \},$$

il vient  $\|g\|_E \leq C \|g\|_F$  pour tout  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , ce qui, par densité, entraîne  $F \subset E$ .

## 2.2 ÉCHELLES DE RÉGULARITÉ

DÉFINITION 1. Une suite  $(E^m)_{m \in \mathbf{Z}}$  d'EBD est une *échelle de régularité* si, pour tous  $m \in \mathbf{Z}$  et  $j = 1, \dots, n$ :

$$(i) \quad E^{m+1} \subset E^m \quad \text{et} \quad (ii) \quad \partial_j(E^{m+1}) \subset E^m.$$

$E^0$  est appelé l'*origine* de l'échelle.

Si  $E$  est un EBD donné, il existe au moins une échelle de régularité d'origine  $E$ : c'est l'échelle de Sobolev définie par (1) et (2); on vérifie en effet ([3]) que  $W^m(E)$  et  $W^{-m}(E)$  sont des EBD pour les normes respectives :

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^m(E)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E, \\ \|f\|_{W^{-m}(E)} &= \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_E : f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)} \right\}. \end{aligned}$$

Dès que l'espace  $E$  est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de  $\mathbf{R}^n$ , l'espace  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

PROPOSITION 2. *On a  $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ , quel que soit  $E$ , dès que les entiers  $m$  et  $k$  sont de même signe.*

*Preuve.* Elle repose sur la remarque élémentaire suivante: si  $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$  et si l'entier  $m$  vérifie  $0 < m < |\alpha|$ , il existe  $\beta \in \mathbf{N}^n$  tel que  $\beta < \alpha$  et  $|\beta| = m$ . Les détails sont laissés au lecteur.

DÉFINITION 2. L'échelle de Sobolev d'origine  $E$  est dite *invariante* si elle vérifie la propriété (3), ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à :

$$(5) \quad W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)) \quad (m > 0, k > 0).$$

### 2.3 DUALITÉ DE L'ÉCHELLE DE SOBOLEV

On notera  $E_0$  et  $W_0^m(E)$  les fermetures respectives de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  dans  $E$  et dans  $W^m(E)$ .

**PROPOSITION 3.** *Soit  $E$  un EBD incluant  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . On a alors :*

- (i)  $(W_0^m(E))' = W^{-m}((E_0)')$   $(m \geq 0)$ ,
- (ii)  $(W_0^{-m}(E))' \subset W^m((E_0)')$   $(m > 0)$ .

*Preuve.* Voir [3]. Précisons que, dans l'ouvrage en question, l'inclusion

$$W^m((E_0)') \subset (W_0^{-m}(E))'$$

est donnée pour vraie; mais il y a une lacune dans la preuve: quand on décompose  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  sous la forme

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)}$$

où  $g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , rien ne dit qu'on obtient ainsi toutes les décompositions possibles de  $g$  avec  $g_\alpha \in E$  ! Une chose reste exacte cependant:

**PROPOSITION 4.** *Soit  $m > 0$ . Alors, pour tous  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  et  $g \in W^{-m}(E)$ , on a :*

$$|\langle g, f \rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \|g\|_{W^{-m}(E)}.$$

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $m > 0$ . Si  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  est dense dans  $W^m((E_0)')$ , alors*

$$(6) \quad (W_0^{-m}(E))' = W^m((E_0)').$$

On a, par exemple, la propriété bien connue suivante :

$$(W^{-m}(L^p(\mathbf{R}^n)))' = W^m(L^{p'}(\mathbf{R}^n)),$$

pour  $1 < p < \infty$ ,  $p' = p/(p - 1)$ .

## 2.4 LES $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -MODULES INVARIANTS PAR TRANSLATION

Nous allons voir que l'identité (6) est vérifiée pour une classe assez vaste d'EBD invariants par translation.

On dit que  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module si, pour tous  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  et  $f \in E$ , on a  $gf \in E$ . Notons qu'alors l'opérateur linéaire  $f \mapsto gf$  est borné sur  $E$  et donc que la fonction  $g$  admet une norme en tant que *multiplicateur ponctuel* de  $E$ :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E : \|f\|_E \leq 1\}.$$

**THÉORÈME 2.** *Soit  $E$  un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

- (P<sub>0</sub>)  *$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  est un sous-espace dense de  $E$ ;*
- (P<sub>1</sub>) *pour tout  $f \in E$  et  $t \in \mathbf{R}^n$ , on a  $\tau_t f \in E$  et  $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$ ;*
- (P<sub>2</sub>)  *$E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module et, pour tout  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , on a :*

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty.$$

*Alors, pour  $m \in \mathbf{Z}$ ,*

1.  *$E'$  possède les propriétés (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>);*
2.  *$W^m(E)$  possède les propriétés (P<sub>0</sub>), (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>);*
3.  *$(W^m(E))' = W^{-m}(E')$ .*

*Preuve.* Le fait que  $E'$  et  $W^m(E)$  possèdent les propriétés (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) se vérifie sans difficulté. La preuve de la seconde assertion repose sur les résultats classiques suivants :

**LEMME 1.** *Si  $E$  vérifie (P<sub>0</sub>) et (P<sub>1</sub>), alors, pour tous  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  et  $f \in E$ , on a  $g * f \in E$  et  $\|g * f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$ ; la même estimation est satisfaite dans  $E'$  et dans  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ).*

**LEMME 2.** *Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous  $f \in E$  et  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(h_k g) = g(0)f \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left( \int g(x) dx \right) f$$

*dans l'espace de Banach  $E$ .*

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour  $f \in W^m(E)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f \rho_k = f, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme  $W^m(E)$ ; la densité de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  dans  $W^m(E)$  en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion  $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$ , pour  $m > 0$ . Soit  $f$  une distribution à support compact appartenant à  $W^m(E')$  et  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ; en appliquant la proposition 4 à  $f * \varphi_k$  et  $g$ , on obtient:

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque  $\tilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$  dans  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit  $f \in W^{-m}(E)'$ . Si  $f$  est un élément quelconque de  $W^m(E')$ , on approche  $f$  par les  $f\rho_k$  et on conclut comme ci-dessus.

**REMARQUE.** L'étude de la dualité des  $W^m(E)$  peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un  $C_0$ -groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

### 3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

**THÉORÈME 3.** *Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , ayant les propriétés  $(P_0)$  et  $(P_1)$ ; soit  $m > 0$ . Alors*

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

*Si de plus  $E$  satisfait  $(P_2)$ , alors les échelles de Sobolev d'origines  $E$  et  $E'$  sont invariantes.*

*Preuve.* D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t} \tau_t f dt$$

est borné sur  $E$ . Puisque  $(Tf)' = f - Tf$  pour  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit  $f \in E$ . On en déduit aussitôt que  $T^m$  est un opérateur borné de  $E$  dans  $W^m(E)$ . Si  $f \in E$  et  $g = T^m(f)$ , il vient

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)},$$

de sorte que  $f$  appartient à  $W^{-m}(W^m(E))$ . On peut aussi définir  $T$  sur  $E'$ , à l'aide de la formule

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle f, \tau_{-t}g \rangle dt;$$

cela nous donne  $E' = W^{-m}(W^m(E'))$ ; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir  $E = W^m(W^{-m}(E))$  et  $E' = W^m(W^{-m}(E'))$ . Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour  $m > k$ , on applique la première partie de la preuve à l'espace  $W^{m-k}(E)$ , ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}(W^k(W^{m-k}(E))) = W^{-k}(W^m(E));$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}(W^k(W^{-k}(E))) = W^m(W^{-k}(E)).$$

Le cas  $m < k$  se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à  $E'$ .

**REMARQUE.** Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des  $C_0$ -groupes ([1], théorème 3.3.23).

#### 4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

##### 4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

**DÉFINITION 3.** Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ . On dit que  $E$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein si, pour toute distribution  $f$ , les conditions  $\partial_j^k f \in E$  ( $j = 1, 2$ ;  $k = 0, 1, 2$ ) impliquent  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ .

**PROPOSITION 5.** Si  $E$  est un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ , alors  $W^1(E)$  possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.

*Preuve.* Supposons  $\partial_j^k f \in W^1(E)$ , pour  $j = 1, 2$  et  $k = 0, 1, 2$ . On a en particulier  $\partial_2 f \in W^1(E)$ , d'où  $\partial_1 \partial_2 f \in E$ . La condition  $\partial_1^2 f \in W^1(E)$  implique

$$\partial_1(\partial_1 \partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E;$$

on obtient de même  $\partial_2(\partial_1 \partial_2 f) \in E$ . Ainsi  $\partial_1 \partial_2 f$  appartient à  $W^1(E)$ .

## 4.2 PREUVE DU THÉORÈME 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces  $L^1(\mathbf{R}^2)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$  ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que  $L^1(\mathbf{R}^2)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$  sont des sous-espaces propres de  $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$  et  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$  respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension  $n \geq 3$ , on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et  $v$  une fonction non nulle appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$ . On voit aisément que la fonction  $f = u \otimes v$  vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

## 4.3 CONTRE-EXEMPLES EXPLICITES

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x, y) = 2x - x \log(x^2 + y^2) - 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a  $u \in L_{loc}^\infty$  et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\log(x^2 + y^2);$$

si on pose  $f(x, y) = -\rho(x, y) \log(x^2 + y^2)$ , il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que  $f$  appartient à  $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Soient

$$v(x, y) = -2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad w(x, y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) \log(x^2 + y^2).$$

Les fonctions  $v$  et  $w$  appartiennent à  $L^\infty$  et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w - v \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

d'où  $\frac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Un calcul analogue montre que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  appartient à  $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$ . Finalement  $f$  appartient à  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$  mais non à  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ .

Soit  $g$  une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} fg = +\infty,$$

par exemple  $g(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{(x^2 + y^2) \log^2(x^2 + y^2)}$ . Si l'on avait  $g \in W^{-1}(W^1(L^1))$ , la proposition 4 et le théorème 2 nous donneraient

$$|\langle g, \varphi_k * f \rangle| \leq \| \varphi_k * f \|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))} \| g \|_{W^{-1}(W^1(L^1))},$$

d'où

$$\int g (\varphi_k * f) \leq \| f \|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))} \| g \|_{W^{-1}(W^1(L^1))};$$

puisque  $\varphi_k * f$  tend vers  $f$  presque partout, le lemme de Fatou nous conduirait à :

$$\int fg < +\infty,$$

ce qui contredit le choix de  $g$ .

#### 4.4 LES PLONGEMENTS DE SOBOLEV SOUS-JACENTS

La non-inclusion  $L^1(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^2)))$  peut s'interpréter de manière fort élémentaire en la factorisant à travers des plongements de Sobolev. On commence par observer que

$$(7) \quad W^1(L^1(\mathbf{R}^2)) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$$

(ceci parce que  $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ ; voir par exemple [7], chapitre 5, théorème 2). On dispose en fait d'un plongement de Sobolev un peu plus général que (7), à savoir :

$$BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2);$$

$BV(\mathbf{R}^2)$  est l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont des mesures bornées sur  $\mathbf{R}^2$ . Dès lors l'inclusion

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^2)))$$

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}(L^2(\mathbf{R}^2)) ,$$

ou encore, en passant aux duals :

$$W^1(L^2(\mathbf{R}^2)) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2) ;$$

or  $W^1(L^2(\mathbf{R}^2))$  est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans  $BMO(\mathbf{R}^2)$  et non dans  $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ .

## 5. POUR ALLER PLUS LOIN

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy  $H^1(\mathbf{R}^n)$  et son dual  $BMO(\mathbf{R}^n)$  sont considérés comme des substituts naturels de  $L^1(\mathbf{R}^n)$  et  $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ .  $BMO(\mathbf{R}^n)$  n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations  $h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n)$  et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel; on a en effet  $h^1(\mathbf{R}^n) = F_{12}^0(\mathbf{R}^n)$  et  $bmo(\mathbf{R}^n) = F_{\infty 2}^0(\mathbf{R}^n)$  (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les  $F_{pq}^s$ , on obtient  $W^m(E) = (I - \Delta)^{-m/2}(E)$  pour  $E = h^1(\mathbf{R}^n)$  et  $E = bmo(\mathbf{R}^n)$ , de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

THÉORÈME 4. *Pour  $n > 1$ , on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \subset bmo(\mathbf{R}^n) ,$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))) \subset L^1(\mathbf{R}^n) ,$$

*et ces quatre inclusions sont strictes.*

*Preuve.* Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que  $h^1(\mathbf{R}^n)$  est un sous-espace propre de  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ . Quelques rappels sur  $h^1$  seront

d'abord utiles. Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^*)$  une fonction telle que

$$\forall \xi \neq 0 \quad : \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}} \psi(2^j \xi) = 1 ;$$

on dispose de l'équivalence de normes

$$\|u\|_{h^1(\mathbf{R})} \approx \|u\|_1 + \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\psi(2^{-j} D)(u)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1$$

(voir par exemple [8]). Posons

$$\Psi(\xi, \eta) = \rho(\xi) \psi(\eta) \quad (\xi \in \mathbf{R}^{n-1}, \eta \in \mathbf{R}) ;$$

alors  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$  de sorte que, pour une certaine constante  $C > 0$ , on a

$$(8) \quad \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\Psi(2^{-j} D)(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq C \|f\|_{h^1(\mathbf{R}^n)} .$$

Soit  $\theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$  la fonction dont la transformée de Fourier est  $\rho$ ; soit  $u$  une fonction intégrable sur  $\mathbf{R}$ , n'appartenant pas à  $h^1(\mathbf{R})$ ; soit enfin

$$f(x, y) = \theta(x) u(y) \quad (x \in \mathbf{R}^{n-1}, y \in \mathbf{R}) .$$

D'après le théorème 3, il existe  $v \in W^1(L^1(\mathbf{R}))$  tel que  $u = v + v'$ ; cela nous donne

$$f = \theta \otimes v + \partial_n(\theta \otimes v) ,$$

avec  $\theta \otimes v \in W^1(L^1(\mathbf{R}^n))$ , d'où  $f \in W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ . Puisque  $\rho(2^{-j} \xi) \rho(\xi) = \rho(\xi)$  pour  $j \geq 1$ , il vient

$$\Psi(2^{-j} D)(f) = \theta \otimes \psi(2^{-j} D)(u) .$$

Si la fonction  $f$  appartenait à  $h^1(\mathbf{R}^n)$ , l'estimation (8) nous donnerait

$$\|\theta\|_1 \left\| \left( \sum_{j \geq 1} |\psi(2^{-j} D)(u)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 < +\infty ,$$

d'où  $u \in h^1(\mathbf{R})$ , ce qui contredit l'hypothèse.

## 6. QUESTIONS OUVERTES

1. Pour autant que nous le sachions, la non-inclusion

$$L^\infty(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}(W^1(L^\infty(\mathbf{R}^2))),$$

ne se ramène pas, comme c'est le cas pour  $L^1$ , à des observations élémentaires sur les plongements de Sobolev.

2. Le théorème 4 laisse ouvert le problème d'une description explicite simple des espaces fonctionnels  $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n)))$  et  $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$ .

3. Dans le même ordre d'idée, on vérifie facilement que les EBD

$$E_m = W^m(W^{-m}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \quad (m \geq 0)$$

forment une suite croissante de sous-espaces de  $bmo(\mathbf{R}^n)$ . Cette suite est-elle *strictement* croissante ? Peut-on décrire simplement le sous-espace  $\bigcup_{m \geq 0} E_m$  ? Des questions homologues se posent pour la suite décroissante

$$W^{-m}(W^m(L^1(\mathbf{R}^n))) \quad (m \geq 0)$$

de sous-espaces de  $L^1(\mathbf{R}^n)$ .

4. On peut conjecturer une réciproque de la proposition 5 : *si E possède la propriété de Mitiagin-Ornstein, alors  $E = W^1(W^{-1}(E))$*  ; cela reviendrait à dire que  $W^1(W^{-1}(E))$  est le plus petit EBD incluant  $E$  et possédant la propriété de Mitiagin-Ornstein.

5. Peut-on trouver une «bonne» échelle de régularité d'origine  $L^1$  ? Pour préciser la question, désignons par  $\mathcal{E}$  la classe de tous les EBD de  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ . Existe-t-il une famille  $(S^m)_{m \in \mathbf{Z}}$  d'applications de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  telle que :

- pour tout  $E \in \mathcal{E}$ ,  $(S^m(E))_{m \in \mathbf{Z}}$  est une échelle de régularité d'origine  $E$ ,
- $S^{m+k}(L^1(\mathbf{R}^n)) = S^m(S^k(L^1(\mathbf{R}^n)))$  pour tout  $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$  ?

## RÉFÉRENCES

- [1] AMREIN, W.O., BOUTET DE MONVEL, A. et GEORGESCU, V.  *$C_0$ -Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*. Birkhäuser, 1996.
- [2] BOMAN, J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables. *Illinois J. Math.* 16 (1972), 203–216.
- [3] BOURDAUD, G. *Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien*. Publ. Math. Univ. Paris VII, 23 (1987, 1995).

- [4] GOLDBERG, D. A local version of real Hardy spaces. *Duke Math. J.* 46 (1979), 27–42.
- [5] MITIAGIN, B. S. On the second mixed derivative. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 123 (1958), 606–609 (en russe).
- [6] ORNSTEIN, D. A non-inequality for differential operators in the  $L_1$  norm. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11 (1962), 40–49.
- [7] STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, 1970.
- [8] TRIEBEL, H. *Theory of Function Spaces II*. Birkhäuser, 1992.
- [9] WOJCIECHOWSKI, M. *Non-inequalities of Ornstein type in partial derivatives*. Séminaire d'Initiation à l'Analyse, Paris VI (1992–93).

(Reçu le 29 février 2000)

Gérard Bourdaud

Université Pierre et Marie Curie  
 Équipe d'Analyse  
 Case 186  
 4, place Jussieu  
 F-75252 Paris Cedex 05  
 France  
*e-mail* : bourdaud@math.jussieu.fr

Michał Wojciechowski

Institute of Mathematics  
 Polish Academy of Sciences  
 ul. Śniadeckich 8, I p.  
 PL-00-950 Warszawa  
 Poland  
*e-mail* : miwoj@impan.gov.pl