

10. FURTHER DEVELOPMENTS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DEFINITION 6. $K^*(V, F) = \Gamma(V, F)/\sim$. Addition in $K^*(V, F)$ is by disjoint union of K -cocycles. The natural homomorphism of abelian groups

$$K^i(V, F) \rightarrow K_i C^*(V, F)$$

is defined by

$$(Z, \xi) \rightarrow \mu(Z, \xi).$$

CONJECTURE. $\mu: K^*(V, F) \rightarrow K_* C^*(V, F)$ is an isomorphism.

REMARK 7. Calculations of M. Pennington [25] and A. M. Torpe [32] verify the conjecture for certain foliations.

Given (V, F) , let BG be the classifying space of the holonomy groupoid G . Since ν is a G -vector bundle on V , ν induces a vector bundle τ on BG . As in §3 above there is then a natural map

$$K_*^\tau(BG) \rightarrow K^*(V, F).$$

PROPOSITION 8. *The natural map $K_*^\tau(BG) \rightarrow K^*(V, F)$ is rationally injective. If G is torsion free then $K_*^\tau(BG) \rightarrow K^*(V, F)$ is an isomorphism.*

REMARK 9. Examples show that for foliations with torsion holonomy, the map $K_*^\tau(BG) \rightarrow K^*(V, F)$ may fail to be an isomorphism.

THEOREM 10. *If F admits a C^∞ Euclidean structure such that the Riemannian metric for each leaf has all sectional curvatures non-positive, then*

$$\mu: K^*(V, F) \rightarrow K_* C^*(V, F)$$

is injective.

10. FURTHER DEVELOPMENTS

The theory outlined in §§1–8 can be developed in various directions. We very briefly mention two of them here.

Let A be a C^* -algebra. If G is a Lie group and X is a G -manifold, then using A as coefficients there is both a geometric and an analytic K -theory for (X, G) . The analytic K -theory is the K -theory of the C^* -algebra $(C_0(X) \rtimes G) \otimes A$.

The geometric K -theory is obtained from K -cocycles (Z, ξ, f) where Z, f are as in §2 and $\xi = \{E_0 \xrightarrow{\sigma} E_1\}$ uses G -vector bundles E_0, E_1 on $T^*Z \oplus f^*T^*X$ such that the fibres of E_i are finitely generated projective modules over A . Denote this geometric K -theory by $K^*(X, G; A)$. The natural map

$$K^i(X, G; A) \rightarrow K_i[(C_0(X) \rtimes G) \otimes A]$$

is defined by using elliptic operators in the spirit of Miscenko-Fomenko [22]. We conjecture that this natural map is an isomorphism.

In the notation of Kasparov [18] the group denoted here by $K_*[C_0(X) \rtimes G]$ is $KK(\mathbf{C}, C_0(X) \rtimes G)$. For the K -homology group $KK(C_0(X) \rtimes G, \mathbf{C})$ there is a geometric group $K_*(X, G)$ which is the G -equivariant version of the topologically defined K -homology of [9]. Using transversally elliptic operators [2] one then obtains a natural map

$$K_*(X, G) \rightarrow KK(C_0(X) \rtimes G, \mathbf{C}).$$

We conjecture that this map is injective and that its image is dense (with respect to the natural topology) in $KK(C_0(X) \rtimes G, \mathbf{C})$.

11. ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful to A. Borel for communicating us

PROPOSITION 1 (A. Borel [10]). *Let G be a Lie group with $\pi_0 G$ finite and maximal compact subgroup H . If Z is any proper G -manifold then there exists a G -map from Z to $H \backslash G$.*

In §5 above this was proved for G a connected semi-simple Lie group with finite center. By the argument of §5, Borel's result implies:

COROLLARY 2. *Let G be a Lie group with $\pi_0 G$ finite. For any G -manifold X there is an isomorphism of abelian groups*

$$K_H^i(X \times (\mathfrak{h} \backslash \mathfrak{g})^*) \rightarrow K^i(X, G) \quad (i = 0, 1).$$

Finally, it is a pleasure to thank the many mathematicians who have given us stimulating and enlightening comments. We thank A. Borel, J. Cohen, R. Douglas, B. Lawson, G. Mackey, R. MacPherson, J. Rosenberg, and G. Schwarz.