Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: p-ADIC L-FUNCTION OF TWO VARIABLES

Autor: Fox, Glenn J.

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64800

THEOREM 4.16. *Let $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$. Then for all χ and for all $t \in \mathbf{C}_p$, $|t|_p < 1$,*

$$B_{-n,\chi}(-t) = (-1)^n \chi(-1) B_{-n,\chi}(t)\,.$$

Proof. Since

$$B_{-n,\chi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} B_{-n-m,\chi} t^m ,$$

and $B_{-n-m,\chi} = 0$ whenever $n+m \not\equiv \delta_\chi \pmod 2$ for each $m \in \mathbf{Z}$, $m \geq 1$, we see that $B_{-n,\chi}(t)$ is either an odd or an even function according to whether $n + \delta_\chi$ is odd or even, respectively. Thus

$$\begin{aligned} B_{-n,\chi}(-t) &= (-1)^{n+\delta_\chi} B_{-n,\chi}(t) \\ &= (-1)^n \chi(-1) B_{-n,\chi}(t)\,, \end{aligned}$$

and the proof is complete. □

REFERENCES

[1] ANKENY, N., E. ARTIN and S. CHOWLA. The class number of real quadratic number fields. *Ann. of Math. (2) 56* (1952), 479–493.

[2] BARSKY, D. Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa (une démonstration analytique p-adique du théorème de Ferrero-Washington). *Study group on ultrametric analysis, 10th year: 1982/83, No. 1.* Inst. Henri Poincaré, Paris, 1984.

[3] BERGER, A. Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli. *Acta Math. 14* (1890/1891), 249–304.

[4] BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi.* Basel, 1713. Reprinted in *Die Werke von Jakob Bernoulli.* Vol. 3. Birkhäuser, Basel, 1975.

[5] CARLITZ, L. Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. *J. reine angew. Math. 202* (1959), 174–182.

[6] COMTET, L. *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions.* Revised and enlarged edition. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[7] FRESNEL, J. Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17* (1967), fasc. 2, 281–333 (1968).

[8] GOUVÊA, F. Q. *p-adic Numbers. An Introduction.* Universitext. Springer, Berlin, 1993.

[9] GRANVILLE, A. Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers. *Organic Mathematics (Burnaby, BC, 1995).* CMS Conf. Proc. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 253–276.

[10] GUNARATNE, H. S. A new generalisation of the Kummer congruence. *Computational algebra and number theory (Sydney, 1992).* Math. Appl. 325, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 255–265.

[11] —— Periodicity of Kummer congruences. *Number Theory (Halifax, NS, 1994).* CMS Conf. Proc. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 209–214.

[12] HURWITZ, A. Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s) = \sum (D/n) 1/n^s$, die bei der Bestimmung der Classenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. *Zeitsch. für Math. und Physik 27* (1882), 86–101.

[13] IWASAWA, K. *Lectures on p-adic L-functions.* Ann. of Math. Studies, Vol. 74, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.

[14] KUBOTA, T. and H.-W. LEOPOLDT. Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen. *J. reine angew. Math. 214/215* (1964), 328–339.

[15] LEOPOLDT, H.-W. Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22* (1958), 131–140.

[16] RAABE, J. Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoullische Function. *J. Reine Angew. Math. 42* (1851), 348–367.

[17] RIEMANN, B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsber. Akad. Berlin* (1859), 671–680.

[18] SHIRATANI, K. Kummer's congruence for generalized Bernoulli numbers and its application. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 26* (1972), 119–138.

[19] WASHINGTON, L. C. *Introduction to Cyclotomic Fields.* Second edition. Graduate Texts in Math. 83, Springer, New York, 1997.

[20] —— p-adic L-functions and sums of powers. *J. Number Theory 69* (1998), 50–61.

(Reçu le 27 septembre 1999)

Glenn J. Fox

Department of Mathematics
and Computer Science
Emory University
Atlanta, GA 30322
U. S. A.
e-mail: fox@mathcs.emory.edu