

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 46 (2000)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: p-ADIC L-FUNCTION OF TWO VARIABLES
Autor: Fox, Glenn J.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64800>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THEOREM 4.16. Let $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$. Then for all χ and for all $t \in \mathbf{C}_p$, $|t|_p < 1$,

$$B_{-n,\chi}(-t) = (-1)^n \chi(-1) B_{-n,\chi}(t).$$

Proof. Since

$$B_{-n,\chi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} B_{-n-m,\chi} t^m,$$

and $B_{-n-m,\chi} = 0$ whenever $n+m \not\equiv \delta_\chi \pmod{2}$ for each $m \in \mathbf{Z}$, $m \geq 1$, we see that $B_{-n,\chi}(t)$ is either an odd or an even function according to whether $n + \delta_\chi$ is odd or even, respectively. Thus

$$\begin{aligned} B_{-n,\chi}(-t) &= (-1)^{n+\delta_\chi} B_{-n,\chi}(t) \\ &= (-1)^n \chi(-1) B_{-n,\chi}(t), \end{aligned}$$

and the proof is complete. \square

REFERENCES

- [1] ANKENY, N., E. ARTIN and S. CHOWLA. The class number of real quadratic number fields. *Ann. of Math. (2)* 56 (1952), 479–493.
- [2] BARSKY, D. Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa (une démonstration analytique p -adique du théorème de Ferrero-Washington). *Study group on ultrametric analysis, 10th year: 1982/83, No. 1*. Inst. Henri Poincaré, Paris, 1984.
- [3] BERGER, A. Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli. *Acta Math.* 14 (1890/1891), 249–304.
- [4] BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi*. Basel, 1713. Reprinted in *Die Werke von Jakob Bernoulli*. Vol. 3. Birkhäuser, Basel, 1975.
- [5] CARLITZ, L. Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. *J. reine angew. Math.* 202 (1959), 174–182.
- [6] COMTET, L. *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*. Revised and enlarged edition. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.
- [7] FRESNEL, J. Nombres de Bernoulli et fonctions L p -adiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 17 (1967), fasc. 2, 281–333 (1968).
- [8] GOUVÊA, F. Q. *p -adic Numbers. An Introduction*. Universitext. Springer, Berlin, 1993.
- [9] GRANVILLE, A. Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers. *Organic Mathematics (Burnaby, BC, 1995)*. CMS Conf. Proc. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 253–276.

- [10] GUNARATNE, H. S. A new generalisation of the Kummer congruence. *Computational algebra and number theory (Sydney, 1992)*. Math. Appl. 325, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 255–265.
- [11] — Periodicity of Kummer congruences. *Number Theory (Halifax, NS, 1994)*. CMS Conf. Proc. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 209–214.
- [12] HURWITZ, A. Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s) = \sum (D/n)1/n^s$, die bei der Bestimmung der Classenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. *Zeitsch. für Math. und Physik* 27 (1882), 86–101.
- [13] IWASAWA, K. *Lectures on p -adic L -functions*. Ann. of Math. Studies, Vol. 74, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.
- [14] KUBOTA, T. and H.-W. LEOPOLDT. Eine p -adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p -adischen Dirichletschen L -Funktionen. *J. reine angew. Math.* 214/215 (1964), 328–339.
- [15] LEOPOLDT, H.-W. Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 22 (1958), 131–140.
- [16] RAABE, J. Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoullische Function. *J. Reine Angew. Math.* 42 (1851), 348–367.
- [17] RIEMANN, B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsber. Akad. Berlin* (1859), 671–680.
- [18] SHIRATANI, K. Kummer's congruence for generalized Bernoulli numbers and its application. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* 26 (1972), 119–138.
- [19] WASHINGTON, L. C. *Introduction to Cyclotomic Fields*. Second edition. Graduate Texts in Math. 83, Springer, New York, 1997.
- [20] — p -adic L -functions and sums of powers. *J. Number Theory* 69 (1998), 50–61.

(Reçu le 27 septembre 1999)

Glenn J. Fox

Department of Mathematics
and Computer Science

Emory University

Atlanta, GA 30322

U. S. A.

e-mail: fox@mathcs.emory.edu