

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** p-ADIC L-FUNCTION OF TWO VARIABLES  
**Autor:** Fox, Glenn J.  
**Kapitel:** 2.3 Dirichlet L-functions  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64800>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2.3 DIRICHLET  $L$ -FUNCTIONS

For  $\chi$  a Dirichlet character with conductor  $f_\chi$ , the Dirichlet  $L$ -function for  $\chi$  is defined by

$$L(s; \chi) = \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\chi(b)}{b^s},$$

for  $s \in \mathbf{C}$  such that  $\Re(s) > 1$ . Note that  $L(s; \chi)$  can be continued analytically to all of  $\mathbf{C}$ , except for a pole of order 1 at  $s = 1$  when  $\chi = 1$ .

Let  $\tau(\chi)$  be a Gauss sum,

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f_\chi} \chi(a) e^{2\pi i a / f_\chi},$$

where  $i^2 = -1$ , and let

$$\delta_\chi = \begin{cases} 0, & \text{if } \chi(-1) = 1 \\ 1, & \text{if } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Then  $L(s; \chi)$  satisfies the functional equation

$$(7) \quad \left(\frac{f_\chi}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s + \delta_\chi}{2}\right) L(s; \chi) = W_\chi \left(\frac{f_\chi}{\pi}\right)^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s + \delta_\chi}{2}\right) L(1-s; \bar{\chi}),$$

where  $\Gamma(s)$  is the gamma function, and  $W_\chi = \frac{\tau(\chi)}{i^{\delta_\chi} \cdot \sqrt{f_\chi}}$ , having the property that  $|W_\chi| = 1$ . Since  $\Gamma(s)$  has simple poles at the negative integers,  $L(s; \chi)$  must be zero for  $s = 1 - n$ , where  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 1$ , such that  $n \not\equiv \delta_\chi \pmod{2}$ , except when  $\chi = 1$  and  $n = 1$ .  $L(s; \chi)$  can also be described by means of the Euler product  $L(s; \chi) = \prod_{p \text{ prime}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$ , for  $s \in \mathbf{C}$  such that  $\Re(s) > 1$ . Thus  $L(s; \chi) \neq 0$  in this domain.

The generalized Bernoulli numbers,  $B_{n, \chi}$ , and the Dirichlet  $L$ -function,  $L(s; \chi)$ , share the following relationship, a proof of this being found in [13]:

**THEOREM 2.1.** *Let  $\chi$  be a Dirichlet character, and let  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 1$ . Then  $L(1 - n; \chi) = -\frac{1}{n} B_{n, \chi}$ .*

Thus we have a way to express certain values of a function defined in terms of an infinite sum as quantities that can be found by a finite process.