

## 4. Solvable simply connected Lie groups

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

When  $G$  has torsion, the map  $K_*^r([EG \times X]/G) \rightarrow K^*(X, G)$  can fail to be an isomorphism. The simplest example of this is obtained by taking  $X$  to be a point and  $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

When  $G$  has torsion,  $K_*^r([EG \times X]/G)$  appears to be only a first approximation to  $K^*(X, G)$  and  $K_*[C_0(X) \rtimes G]$ . The key point is that when  $G$  has torsion, there will be proper  $G$ -manifolds on which the  $G$ -action is not free.

#### 4. SOLVABLE SIMPLY CONNECTED LIE GROUPS

The conjecture stated in §2 above is verified for (connected) solvable simply connected Lie groups by

**PROPOSITION 1.** *Let  $G$  be a (connected) solvable simply connected Lie group, and let  $X$  be a  $G$ -manifold. Then there is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} K^*(X, G) & \xrightarrow{\mu} & K_*[C_0(X) \rtimes G] \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^*(X) & \longrightarrow & K_*[C_0(X)] \end{array}$$

*in which each arrow is an isomorphism.*

The proof depends on

**LEMMA 2.** *Let  $G$  be a (connected) solvable simply connected Lie group, and let  $Z$  be a proper  $G$ -manifold. Then there exists a  $G$ -map from  $Z$  to  $G$ .*

*Proof of Lemma 2.* Since the action of  $G$  on  $Z$  is proper all isotropy groups are compact.  $G$  has no non-trivial compact subgroups, so the action of  $G$  on  $Z$  is free. Therefore  $Z$  is a principal  $G$ -bundle with base  $Z/G$ . As  $G$  is itself a contractible space on which  $G$  acts freely, there is a  $G$ -map from  $Z$  to  $G$ .  $\square$

*Proof of Proposition 1.* In the diagram of the proposition the right vertical arrow is the Thom isomorphism of [13]. The lower horizontal arrow is the standard isomorphism which is valid for any locally compact Hausdorff topological space.

To define the left vertical arrow the first step is to use the lemma to construct an isomorphism

$$(1) \quad K^*(X, G) \rightarrow K_G^*(T^*[X \times G] \oplus \pi_1^*T^*X).$$

Here  $G$  acts on  $X \times G$  by

$$(x, g_1)g = (xg, g_1g)$$

and  $\pi_1: X \times G \rightarrow X$  is the projection.

If  $(Z, \xi, f)$  is a  $K$ -cocycle for  $(X, G)$  then according to the lemma there exists a  $G$ -map  $\psi: Z \rightarrow G$ . Define  $h: Z \rightarrow X \times G$  by  $h(z) = (fz, \psi z)$  so that there is the evident commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & X \times G \\ f \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & X & \end{array}$$

The isomorphism (1) is

$$(Z, \xi, f) \rightarrow h_!(\xi).$$

Next,  $T^*[X \times G] \oplus \pi_1^*T^*X$  has a  $G$ -invariant  $\text{Spin}^c$ -structure so by the Thom isomorphism theorem of §2, there is an isomorphism

$$(2) \quad K_G^*(T^*[X \times G] \oplus \pi_1^*T^*X) \cong K_G^*(X \times G).$$

Finally, the action of  $G$  on  $X \times G$  is free and has  $[X \times G]/G = X$ . This yields an isomorphism

$$(3) \quad K_G^*(X \times G) \cong K^*(X).$$

Composing (1), (2), (3) gives the left vertical arrow of the proposition.  $\square$

REMARK 3. The two vertical arrows in the diagram of the proposition are not quite canonical. First an orientation must be chosen for the Lie algebra of  $G$ . There is no dimension shift in the horizontal arrows of the proposition. If  $\epsilon = \dim(G)$ , then the left vertical arrow maps  $K^i(X, G)$  to  $K^{i+\epsilon}(X)$ , and the right vertical arrow maps  $K_i[C_0(X) \rtimes G]$  to  $K_{i+\epsilon}[C_0(X)]$ .