

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COURBES ENTIÈRES ET FEUILLETAGES HOLOMORPHES
Autor: Brunella, Marco
Kapitel: 3. Le degré du fibré normal sur la courbe entière
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64446>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'observation fondamentale est alors la suivante : puisque $[\Phi^{(n)}]^2 \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, la somme $\sum_{j=0}^{n-1} \dots$ qui apparaît ci-dessus est majorée par $[\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2$ pour tout $n \geq 0$, et donc

$$\nu(\Phi^{(n)}, q_i^{(n)}) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Le feuilletage $\mathcal{F}^{(n)}$ sur $X^{(n)}$ a (au plus) deux singularités non petites, $q_1^{(n)}$ et $q_2^{(n)}$, et de l'inégalité tautologique raffinée on déduit

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] \geq -\nu(\Phi^{(n)}, q_1^{(n)}) - \nu(\Phi^{(n)}, q_2^{(n)}).$$

Mais puisqu'on éclate toujours des singularités réduites on a $T_{\mathcal{F}^{(n)}} = (\pi^{(n)})^*(T_{\mathcal{F}})$ (où $\pi^{(n)}$ est la projection de $X^{(n)}$ sur X), et donc $c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] = c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$. On en déduit que

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0.$$

C'est le théorème 1. Tout cela démontre (s'il en était besoin) que les éclatements ne servent pas seulement à résoudre des singularités...

3. LE DEGRÉ DU FIBRÉ NORMAL SUR LA COURBE ENTIÈRE

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'auparavant, nous allons ici démontrer le résultat suivant, qui précise [Mc, II.1.4.1].

THÉORÈME 2. $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0$.

On va d'abord se débarrasser de la composante algébrique $\Phi_{alg} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta_{C_j}$. Puisque \mathcal{F} est à singularités réduites, $C = \bigcup_{j=1}^N C_j$ est une courbe à croisements normaux : elle est \mathcal{F} -invariante, donc ses singularités sont contenues dans $\text{Sing}(\mathcal{F})$ et au voisinage d'une de ses singularités elle coïncide avec l'union des séparatrices de \mathcal{F} . On a $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] = [C_j]^2 + Z(C_j, \mathcal{F})$, où $Z(C_j, \mathcal{F})$ est la multiplicité totale des singularités de \mathcal{F} le long de C_j [Br, lemme 3], et cette multiplicité est évidemment au moins égale à $[C_j] \cdot \sum_{k \neq j} [C_k]$. Donc $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] \geq [C_j] \cdot [C]$ et par conséquent

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi_{alg}] \geq [\Phi_{alg}] \cdot [C].$$

D'autre part, la classe $[\Phi]$ est numériquement effective et donc $[\Phi_{alg}] \cdot [C] \geq -[\Phi_{diff}] \cdot [C]$. On en déduit :

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}].$$

Notre but est donc de démontrer

$$c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}] \geq 0.$$

Pour cela, nous allons d'abord construire une 2-forme fermée Θ qui représente la classe de Chern de $N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$, d'après la méthode classique qui est à la base de tous les théorèmes d'annulation ou d'indice (Baum-Bott, Camacho-Sad, etc.).

On peut choisir un recouvrement ouvert $\{U_k\}$ de X , des 1-formes logarithmiques $\Omega_k \in \Omega^1(\log C)(U_k)$ et des $(1,0)$ -formes $\beta_k \in A^{1,0}(U_k)$ telles que :

- i) dans U_k , \mathcal{F} est représenté par $f_k \Omega_k = 0$, où f_k est une équation de C dans U_k (donc $f_k \Omega_k \in \Omega^1(U_k)$ est une 1-forme holomorphe à singularités isolées);
- ii) chaque U_k contient au plus une singularité de \mathcal{F} ;
- iii) $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$ dans $U_k \setminus V_k$, où $V_k \subset U_k$ est disjoint de U_l pour tout $l \neq k$.

Il est clair que de tels $\{U_k, \Omega_k, \beta_k\}$ existent, voici la construction explicite qu'on utilisera plus loin. Au voisinage d'un point régulier \mathcal{F} est donné (en coordonnées convenables z, w) par $dz = 0$, on peut choisir alors $\Omega = dz$ ou $\Omega = \frac{dz}{z}$, selon la structure de C au voisinage du point, et $\beta = 0$. Au voisinage d'un point singulier \mathcal{F} est donné par $adw - bdz = 0$, avec a et b holomorphes et $\{a = b = 0\} = \{(0, 0)\}$. Si le point singulier n'appartient pas à C on choisira $\Omega = adw - bdz$ et

$$\beta = F \cdot \frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw),$$

où F est une fonction C^∞ réelle qui s'annule au voisinage du point singulier et qui vaut 1 hors d'un voisinage (aussi petit que l'on veut) de ce même point. Si le point singulier est un point double de C , on peut supposer que dans les coordonnées fixées on a $C = \{zw = 0\}$, et donc a est divisible par z et b par w car C est \mathcal{F} -invariante. On choisira alors $\Omega = \frac{a}{z} \frac{dw}{w} - \frac{b}{w} \frac{dz}{z}$ et

$$\beta = F \cdot \frac{a_z - \frac{a}{z} + b_w - \frac{b}{w}}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw).$$

Le cas intermédiaire où le point singulier appartient à un point lisse de C est laissé au lecteur.

Les ouverts U_k seront donc des petites boules centrées sur des points réguliers ou singuliers, et $V_k \subset U_k$ des boules encore plus petites, ou même vides dans le cas des points réguliers.

Sur chaque intersection $U_k \cap U_j$ on a

$$\Omega_k = g_{kj} \Omega_j \quad g_{kj} \in \mathcal{O}^*(U_k \cap U_j)$$

et $\{g_{kj}\} \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est un cocycle définissant le fibré $N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$. Pour se convaincre de cela, notons L le fibré défini par $\{g_{kj}\}$. Le fibré $L \otimes \mathcal{O}(C)$ est donc donné par le cocycle $\{g_{kj} \frac{f_k}{f_j}\}$. Les relations $f_k \Omega_k = g_{kj} \frac{f_k}{f_j} f_j \Omega_j$ montrent que les $f_k \Omega_k$ définissent une 1-forme holomorphe à valeurs dans $L \otimes \mathcal{O}(C)$, et plus exactement une section de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes L \otimes \mathcal{O}(C)$ car les $f_k \Omega_k$ engendrent \mathcal{F} . Cette section n'a aucun zéro, puisque chaque $f_k \Omega_k$ est à singularités isolées, donc elle trivialisait $N_{\mathcal{F}}^* \otimes L \otimes \mathcal{O}(C)$, d'où $L = N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)$.

En différentiant la relation ci-dessus et grâce à $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$, qui est satisfaite sur les intersections, on obtient

$$\frac{dg_{kj}}{g_{kj}} = \beta_k - \beta_j + \gamma_{kj}$$

où $\gamma_{kj} \in A^{1,0}(U_k \cap U_j)$ s'annulent sur \mathcal{F} et forment un cocycle. On peut trivialisier ce cocycle, car on est en train de travailler avec des formes C^∞ : $\gamma_{kj} = \gamma_k - \gamma_j$, $\gamma_k \in A^{1,0}(U_k)$, $\gamma_k|_{\mathcal{F}} = 0$. Ainsi

$$\frac{dg_{kj}}{g_{kj}} = (\beta_k + \gamma_k) - (\beta_j + \gamma_j)$$

et donc la 2-forme fermée $\Theta \in A^2(X)$ localement définie par

$$\Theta = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_k + \gamma_k)$$

représente $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C))$. Remarquons qu'elle n'est pas (en général) de type (1,1).

Pour évaluer $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}]$ il faut intégrer Θ sur la courbe entière f , ou mieux il faut intégrer Θ sur la lamination $K_{diff} = \text{Supp}(\Phi_{diff})$ par rapport à la mesure transverse invariante μ_{diff} . Mais $d\gamma_k|_{\mathcal{F}} \equiv 0$ et $d\beta_k|_{\mathcal{F}} = 0$ hors de V_k , grâce à $d\Omega_k = \beta_k \wedge \Omega_k$, et l'intégrale est donc localisée au voisinage des points singuliers. L'expression $\Phi_{diff}(d\beta_k)$ est sans ambiguïté et avec ces notations on peut résumer la discussion dans le lemme suivant.

LEMME 4. *On a*

$$c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}] = \frac{1}{2\pi i} \sum \Phi_{diff}(d\beta_k),$$

où la somme est sur tous les k tels que U_k est centré sur une singularité de \mathcal{F} dans K_{diff} . \square

Tout cela marche sans restriction sur les singularités de \mathcal{F} , pourvu que C soit à croisements normaux. Mais notre feuilletage n'a que des singularités réduites, et en plus, d'après le lemme 4, seules celles dans K_{diff} nous intéressent. C'est le moment d'exploiter à fond le fait que la mesure transverse μ_{diff} associée à Φ_{diff} n'a pas d'atomes. On renvoie à [CS] et [MR] pour une description de la structure qualitative des singularités réduites.

Si $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ est un nœud-col, on voit sans peine que toute feuille (locale) de \mathcal{F} s'accumule sur la séparatrice forte, sauf la séparatrice faible (si elle existe). Pour voir cela, reprenons la forme normale de Dulac d'un nœud-col de multiplicité d , dans laquelle on supposera de plus que $F \equiv 0$ (ce qui est toujours possible dans des coordonnées formelles, voir [MR]):

$$z(1 + \lambda w^{d-1})dw - w^d dz = 0.$$

Par intégration directe, on trouve que les feuilles sont les graphes des fonctions (multiformes si λ n'est pas un entier)

$$z = cw^\lambda e^{-\frac{1}{(d-1)w^{d-1}}}, \quad c \in \mathbf{C},$$

plus la séparatrice forte $\{w = 0\}$. Pour $c = 0$ on obtient la séparatrice faible $\{z = 0\}$, et toute autre feuille contient $\{w = 0\}$ dans son adhérence. On trouve aussi que l'holonomie de $\{w = 0\}$ est du type

$$w \mapsto w + 2\pi i w^d + o(w^d).$$

Ces propriétés qualitatives de \mathcal{F} persistent quand $F \not\equiv 0$ (sauf l'existence de la séparatrice faible), voir [MR] pour plus de détails. L'holonomie de la séparatrice forte est assez riche pour forcer toute mesure transverse invariante à se concentrer sur la même séparatrice, et donc à être atomique. Bref, K_{diff} ne contient pas de nœuds-cols.

Des considérations holonomiques du même genre excluent les singularités engendrées par un champ de vecteurs dont le quotient des valeurs propres n'est pas réel et montrent donc que toute singularité p de \mathcal{F} dans K_{diff} est d'un des deux types suivants:

- I) au voisinage de p , \mathcal{F} est engendré (en coordonnées convenables) par $(1 + \dots)zdw - (\lambda + \dots)w^d dz$, avec $\lambda \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+$; le théorème de linéarisation de Poincaré permet même de linéariser cette 1-forme;
- II) comme dans I) mais avec $\lambda \in \mathbf{R}^-$; si $\lambda \in \mathbf{Q}^-$ la singularité est sans doute linéarisable, si $\lambda \in \mathbf{R}^- \setminus \mathbf{Q}^-$ elle l'est formellement mais pas nécessairement analytiquement.

LEMME 5. Dans le cas I) on a

$$\Phi_{\text{diff}}\left(\frac{d\beta_k}{2\pi i}\right) \geq 0.$$

Preuve. Si C a un point double en p on a $\Omega_k = \frac{dw}{w} - \lambda \frac{dz}{z}$ fermée et donc on peut prendre $\beta_k \equiv 0$. Si $p \notin C$ on a $\Omega_k = z dw - \lambda w dz$ et $\beta_k = F_k \frac{(1+\lambda)}{|z|^2 + |\lambda w|^2} (\bar{z} dz + \lambda \bar{w} dw)$ (et si C a une seule branche à travers p on a la même expression mais avec 1 ou λ à la place de $1 + \lambda$). On peut supposer que U_k est un petit bidisque $\{|z| < \epsilon, |w| < \epsilon\}$ autour de p , avec $S_k = \partial U_k$ (lissé aux coins) transverse à \mathcal{F} . Donc $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cap S_k$ est un feuilletage réel orienté de dimension 1 et sans singularités (l'orientation étant induite par celle des feuilles complexes de $\mathcal{F}|_{U_k}$), et μ_{diff} induit une mesure transverse \mathcal{L} -invariante qu'on notera par la même lettre. Par Stokes, calculer $\Phi_{\text{diff}}(\frac{d\beta_k}{2\pi i})$ revient à calculer l'intégrale de $\frac{\beta_k}{2\pi i}$ le long de \mathcal{L} par rapport à μ_{diff} . Mais

$$\frac{\beta_k}{2\pi i} \Big|_{\{|z|=\epsilon, |w|\leq\epsilon\} \cap \mathcal{F}} = \frac{(1+\lambda)}{2\pi i} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_k}{2\pi i} \Big|_{\{|w|=\epsilon, |z|\leq\epsilon\} \cap \mathcal{F}} = \frac{(1+\lambda^{-1})}{2\pi i} \frac{dw}{w}$$

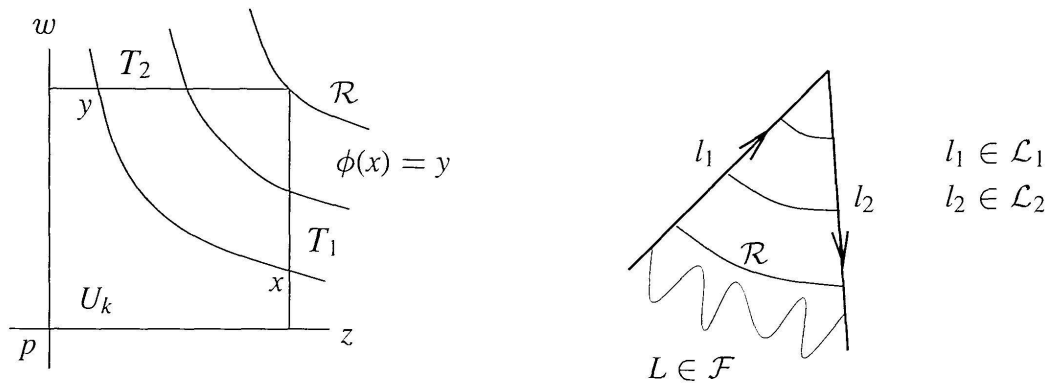
sont positives le long de \mathcal{L} , d'où la conclusion cherchée (avec stricte inégalité). \square

LEMME 6. Dans le cas II) on a

$$\text{Re } \Phi_{\text{diff}}\left(\frac{d\beta_k}{2\pi i}\right) = 0.$$

Preuve. Comme dans le lemme précédent, il suffit considérer le cas $p \notin C$, les autres cas étant presque identiques. Donc $\Omega_k = a dw - b dz$, avec $a = z(1 + \dots)$, $b = \lambda w(1 + \dots)$, $\lambda \in \mathbf{R}^-$, et $\beta_k = F_k \frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw)$. Si $(a_z + b_w)(0,0) = 0$ (i.e. $\lambda = -1$) on peut en réalité choisir β_k holomorphe (dans tout U_k), ce qui donne bien sûr $\Phi_{\text{diff}}(d\beta_k) = 0$: il suffit prendre $\beta_k = A dz + B dw$, où A et B sont des fonctions holomorphes satisfaisant $a_z + b_w = Aa + Bb$. On supposera donc $\lambda \neq -1$. Cette fois-ci le feuilletage n'est pas transverse à des petites sphères autour du point singulier, et c'est justement sur cela qu'on va s'appuyer. Soit \mathcal{R} le feuilletage réel 1-dim tangent à \mathcal{F} dans $\bar{U}_k \setminus \{p\}$ engendré par le noyau de $\eta|_{\mathcal{F}}$, où $\eta = \text{Im}[\frac{a_z + b_w}{|a|^2 + |b|^2} (\bar{a} dz + \bar{b} dw)]$. On vérifie aisément que sur chaque séparatrice $\{z = 0\}$ et $\{w = 0\}$ ce feuilletage \mathcal{R} est de type radial, tandis que hors des séparatrices les feuilles de \mathcal{R} "glissent" à côté de p . Plus exactement, on peut choisir le bidisque U_k de manière telle que :

- a) ∂U_k est l'union de deux tores solides fermés T_1 , T_2 dont les intérieurs sont transverses à \mathcal{R} ;
- b) $\partial T_1 = \partial T_2$ est formé des points de ∂U_k où \mathcal{R} est tangent extérieurement à U_k ;
- c) les feuilles de \mathcal{R} dans \bar{U}_k et hors des séparatrices établissent un difféomorphisme ϕ entre T_1 et T_2 privés des intersections avec les séparatrices.



Sur T_1 et T_2 , \mathcal{F} induit des feuilletages orientés \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 avec mesures transverses invariantes μ_1 et μ_2 . Le difféomorphisme ϕ échange ces deux feuilletages, préservant les mesures transverses mais renversant les orientations. On a $\phi^*(\eta|_{\mathcal{L}_2}) = \eta|_{\mathcal{L}_1}$, car $\eta|_{\mathcal{F}}$ est fermée et s'annule sur \mathcal{R} , et donc $\phi^*(\text{Im } \beta_k|_{\mathcal{L}_2}) = \text{Im } \beta_k|_{\mathcal{L}_1}$. Tout cela entraîne que l'intégrale de $\text{Im } \beta_k$ le long de \mathcal{L}_1 par rapport à μ_1 est opposée à celle le long de \mathcal{L}_2 par rapport à μ_2 (le fait que ϕ n'est pas défini entre les intersections avec les séparatrices n'a aucune importance, car ces séparatrices sont de mesure nulle). D'après Stokes on a alors $\Phi_{\text{diff}}(\text{Im } d\beta_k) = 0$. \square

Il nous semble qu'on devrait pouvoir démontrer, dans ce dernier lemme, l'annulation de $\Phi_{\text{diff}}(d\beta_k)$ et non seulement de sa partie imaginaire. Dans [Mc, II.1.4] on trouve des estimations en fonction du nombre de Lelong de Φ_{diff} en p (qui est lié au nombre $\nu(\Phi_{\text{diff}}, p)$ de la section précédente), et il est bien possible que ce nombre s'annule toujours dans le cas II), puisque dans ce cas les feuilles du feuilletage glissent à côté de p (tandis que dans le cas I) elles vont "tout droit" vers p). On vérifie tout cela dans le cas linéarisable, par calcul direct, mais nous ne savons pas si les nombres en question sont des invariants formels (puisque nous ne savons pas ce qu'est la transformée d'une mesure par un difféomorphisme formel).

En tout cas, les lemmes 4, 5 et 6 suffisent pour démontrer que $c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{\text{diff}}] \geq 0$ et donc le théorème 2. On a même l'inégalité stricte dès que K_{diff} contient au moins une singularité de type I) qui ne soit pas un point double de C .

Remarquons que dans cette preuve on a utilisé seulement le fait que Φ est un courant positif fermé \mathcal{F} -invariant et numériquement effectif; sa provenance d'une courbe entière est inessentielle. Remarquons aussi (voir [De2]) que l'effectivité numérique est automatique si $\Phi_{alg} = 0$.

Les théorèmes 1 et 2 et la relation $K_X = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$, où K_X est le fibré canonique de X , impliquent:

COROLLAIRE 1. $c_1(X) \cdot [\Phi] \geq 0$. \square

Si Φ était une courbe algébrique lisse D on aurait la formule d'adjonction $c_1(X) \cdot [D] = [D]^2 + \chi(D)$ et le corollaire serait conséquence de $[D]^2 \geq 0$ (effectivité numérique) et $\chi(D) \geq 0$ (inégalité tautologique). Naïvement, dans tout ce qui précède on a donc remplacé la formule d'adjonction par sa version feuilletée $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})$, $[D]^2$ par $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, et $\chi(D)$ par $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$.

COROLLAIRE 2. X n'est pas de type général. \square

En effet, le fibré canonique d'une surface de type général est presque ample (i.e., ample hors d'une collection finie de courbes rationnelles d'auto-intersection négative, qui sont négligeables car contractibles), et donc ([Mc]) on aurait $c_1(X) \cdot [\Phi] < 0$.

Ceci permet d'éviter, dans la preuve de McQuillan de la conjecture de Green-Griffiths, le recours au théorème de semi-positivité générique de Miyaoka [Mi]. Pour prouver cette conjecture McQuillan considère une courbe entière $f_0: \mathbf{C} \rightarrow X_0$ à valeurs dans une surface de type général. Si $c_1^2(X_0) > c_2(X_0)$, il construit un revêtement ramifié $X \rightarrow X_0$ sur lequel le relevé $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ est tangente à un feuilletage à singularités réduites. Puisque X est encore de type général, le corollaire 2 implique que f , et donc f_0 , est dégénérée.

4. FEUILLETAGES SUR LE PLAN PROJECTIF

Dans cette dernière section nous allons démontrer le théorème énoncé dans l'introduction. Soit donc \mathcal{F} un feuilletage holomorphe de \mathbf{CP}^2 dont toutes les singularités sont non nilpotentes. On a $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1-d)$ et $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(2+d)$, où (par définition) d est le degré de \mathcal{F} .