

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COURBES ENTIÈRES ET FEUILLETAGES HOLOMORPHES
Autor: Brunella, Marco
Kapitel: 1. Courbes entières et courants positifs fermés
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64446>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

est constante. Dans notre théorème on laisse la possibilité que f passe par $\text{Sing}(\mathcal{F})$, et même une infinité de fois : cela pourrait (a priori) arriver si \mathcal{F} a une singularité localement engendrée par un champ de vecteurs du type $pz\frac{\partial}{\partial z} + qw\frac{\partial}{\partial w}$, p, q entiers positifs. Ce caractère singulier de f constitue (comme dans [Mc]) une des difficultés du problème.

Cet article est structuré de la façon suivante. On commence par rappeler la construction et les propriétés basiques d'un courant positif fermé Φ associé à une courbe entière $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ non dégénérée et tangente à un feuilletage \mathcal{F} . Puis on évalue les produits d'intersection $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, où $[\Phi] \in H^2(X, \mathbf{R})$ est la classe de cohomologie de Φ et $T_{\mathcal{F}}$, $N_{\mathcal{F}}$ sont les fibrés tangent et normal de \mathcal{F} . Si les singularités de \mathcal{F} sont réduites (au sens de A. Seidenberg [Se]) ces produits sont non négatifs, ce qu'on trouve déjà dans [Mc] dans le cas du fibré tangent comme conséquence de son "inégalité tautologique" (dans le cas du fibré normal le résultat de [Mc] est plus faible). Enfin, en guise d'application, on démontrera le théorème ci-dessus.

Le lecteur attentif verra que la plupart des idées exposées sont déjà présentes dans [Mc]. On peut donc considérer ce texte comme une introduction à (ou une exégèse de) l'article de McQuillan. Je remercie d'ailleurs le rapporteur du présent article, dont les critiques constructives m'ont poussé à améliorer la rédaction.

1. COURBES ENTIÈRES ET COURANTS POSITIFS FERMÉS

Soit X une variété projective lisse de dimension n et soit $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ une application holomorphe dont l'image n'est pas contenue dans une courbe algébrique. Soulignons que, pour le moment, on ne suppose pas que f soit tangente à un feuilletage holomorphe. On peut associer à une telle courbe entière un courant positif fermé de la façon suivante, qui est essentiellement due à L. Ahlfors et R. Nevanlinna et qu'on retrouve explicitement dans [Mc, I.0.3]. Voir aussi [De1] pour d'autres renseignements utiles sur le sujet et [De2] pour les notions basiques concernant les courants sur les variétés complexes.

Fixons d'abord une forme kählérienne $\omega \in A^{1,1}(X)$. Pour toute $\eta \in A^2(X)$ et pour tout $r > 0$ posons

$$T_{f,r}(\eta) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{D(t)} f^* \eta,$$

où $D(t) \subset \mathbf{C}$ est le disque de rayon t . Considérons les courants positifs $\Phi_r \in A^{1,1}(X)'$ définis par

$$\Phi_r(\eta) = \frac{T_{f,r}(\eta)}{T_{f,r}(\omega)} \quad \forall \eta \in A^2(X).$$

La famille $\{\Phi_r\}_{r>0}$ est bornée par rapport à la norme usuelle de $A^{1,1}(X)'$, on peut donc choisir une suite $\{r_n\} \subset \mathbf{R}^+$, $r_n \rightarrow +\infty$, telle que Φ_{r_n} converge dans la topologie faible pour $n \rightarrow +\infty$ vers un courant positif $\Phi \in A^{1,1}(X)'$. Nous cherchons toutefois des courants *fermés*, et pour cela il faut choisir la suite $\{r_n\}$ de façon convenable. Notons $A(r)$ l'aire de $f(D(r))$ et $L(r)$ la longueur de $f(\partial D(r))$, on a donc

$$T_{f,r}(\omega) = \int_0^r A(t) \frac{dt}{t},$$

et définissons

$$S_{f,r}(\omega) = \int_0^r L(t) \frac{dt}{t}.$$

Si $\beta \in A^1(X)$, le théorème de Stokes et la compacité de X garantissent l'inégalité

$$|T_{f,r}(d\beta)| \leq \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\partial D(t)} |f^* \beta| \leq \text{const} \cdot S_{f,r}(\omega),$$

où la constante *const* dépend de β (c'est sa norme) mais ne dépend pas de r . Pour avoir un courant Φ fermé il suffit donc de choisir la suite $\{r_n\}$ de manière telle que la propriété géométrique suivante soit satisfaite :

$$\frac{S_{f,r_n}(\omega)}{T_{f,r_n}(\omega)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

L'existence d'une telle suite est assurée par le lemme suivant, qui est une variation sur le lemme d'Ahlfors (affirmant $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{L(r)}{A(r)} = 0$).

LEMME 0. *On a*

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{S_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)} = 0.$$

Preuve. Soit $f^* \omega = F(t, \theta) t dt \wedge d\theta$, où (t, θ) sont les coordonnées polaires dans \mathbf{C} et F est une fonction non négative. On a alors $A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} t F(t, \theta) d\theta dt$ et la conformité de f implique que $L(r) = r \int_0^{2\pi} F(r, \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour $r > 1$,

$$\begin{aligned} S_{f,r}(\omega) - S_{f,1}(\omega) &= \int_1^r \int_0^{2\pi} t F(t, \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \frac{dt}{t} \\ &\leq \left(\int_1^r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_1^r \int_0^{2\pi} t^2 F(t, \theta) d\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2\pi \log r)^{\frac{1}{2}} A(r)^{\frac{1}{2}} = (2\pi r \log r)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dr} T_{f,r}(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{(r \log r) \frac{d}{dr} T_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2} = 0.$$

Remarquons que $T_{f,r}(\omega)$ est strictement croissante et sa croissance est au moins logarithmique; en particulier $T_{f,r}(\omega)$ est divergente pour $r \rightarrow +\infty$. Pour tout $R > 1$ la mesure de $[R, +\infty)$ par rapport à la mesure $\frac{dT_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2}$ est finie, tandis que par rapport à $\frac{dr}{r \log r}$ elle est infinie. Donc il n'existe pas $c > 0$ tel que $\frac{dT_{f,r}(\omega)}{T_{f,r}(\omega)^2} \geq c \frac{dr}{r \log r}$ pour tout r dans un voisinage de $+\infty$. \square

Si $\{r_n\}$ est une suite comme ci-dessus, on pourra alors extraire une sous-suite $\{r_{n_k}\}$ divergente telle que $\Phi_{r_{n_k}}$ converge vers un courant positif fermé Φ .

Soulignons que Φ ne dépend pas seulement de f mais aussi de la forme kählérienne choisie et, surtout, des suites $\{r_n\}$ et $\{r_{n_k}\}$. En fait, il n'est pas indispensable que ω soit kählérienne [Mc, I.0.4.8], il suffit qu'elle satisfasse la propriété suivante: ω est une $(1, 1)$ -forme fermée, semi-positive sur X et strictement positive sur $X \setminus \Sigma$, où $\Sigma \subset X$ est une hypersurface algébrique qui ne contient pas l'image de f . On appellera *semi-kählérienne* une telle forme.

Si $\pi: Y \rightarrow X$ est un morphisme birationnel (par exemple l'éclatement d'un point ou d'une sous-variété de X) et si $f(\mathbf{C})$ n'est pas contenue dans l'ensemble des valeurs critiques de π , on peut relever f en $\tilde{f}: \mathbf{C} \rightarrow Y$. Si $\omega \in A^{1,1}(X)$ est semi-kählérienne, $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$ l'est aussi et on peut construire, comme auparavant, un courant positif fermé $\tilde{\Phi} \in A^{1,1}(Y)'$ (quitte à choisir, peut-être, de nouvelles sous-suites). On a évidemment:

$$\pi_* \tilde{\Phi} = \Phi$$

car $T_{\tilde{f},r}(\pi^* \eta) = T_{f,r}(\eta)$ pour toute $\eta \in A^2(X)$.

On notera $[\Phi]$ la classe de cohomologie dans $H^{n-1,n-1}(X, \mathbf{R})$ représentée par Φ . Si $Z \subset X$ est une hypersurface algébrique, on notera $[Z]$ sa classe dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ et $[\Phi] \cdot [Z]$ le produit d'intersection avec $[\Phi]$.

LEMME 1. Soit $Z \subset X$ une hypersurface algébrique qui ne contient pas l'image de f , alors

$$[\Phi] \cdot [Z] \geq 0.$$

REMARQUE. $f(\mathbf{C}) \not\subset Z$ n'exclut pas la possibilité que $\text{Supp } \Phi \subset Z$, par exemple Φ pourrait être le courant d'intégration sur une courbe contenue dans Z .

Preuve. Fixons une métrique hermitienne sur le fibré $\mathcal{O}(Z)$ et soit $\Theta \in A^{1,1}(X)$ sa courbure multipliée par $\frac{i}{2\pi}$; il s'agit de montrer que $\Phi(\Theta) \geq 0$. Si s est une section de $\mathcal{O}(Z)$ qui s'annule précisément sur Z , on a la formule de Poincaré-Lelong (voir, par exemple, [De2])

$$\Theta = \delta_Z + \frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log \|s\|^2,$$

où δ_Z est le courant d'intégration sur Z et l'égalité est au sens des courants. Si $r > 0$, la formule de Jensen (voir, par exemple, [De1]) donne (en supposant, pour simplifier, que $f(0) \notin Z$)

$$\begin{aligned} T_{f,r}(\Theta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|s(f(re^{i\theta}))\| d\theta \\ & + \log \|s(f(0))\| + \sum_{z \in D(r), f(z) \in Z} \text{ordre}_z(s \circ f) \log \frac{r}{|z|}. \end{aligned}$$

Mais $\log \|s\|$ est supérieurement borné sur X , donc $T_{f,r}(\Theta)$ est inférieurement borné, uniformément en r . D'autre part, $T_{f,r}(\omega) \rightarrow +\infty$ pour $r \rightarrow +\infty$, ce qui implique

$$\Phi(\Theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_{f,r}(\Theta)}{T_{f,r}(\omega)} \geq 0. \quad \square$$

Considérons maintenant le cas où X est une surface. Puisque, par hypothèse, $f(\mathbf{C})$ n'est pas contenue dans une courbe algébrique, on déduit du lemme précédent que la classe $[\Phi]$ est *numériquement effective*:

$$[\Phi] \cdot [C] \geq 0 \quad \text{pour toute courbe } C \subset X.$$

On sait bien que cela entraîne:

$$[\Phi]^2 \geq 0.$$

Supposons à présent qu'on dispose sur la surface X d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F} (à singularités isolées), et que la courbe entière $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ est tangente à \mathcal{F} . C'est-à-dire, si Ω est une 1-forme holomorphe dans un ouvert de X qui définit \mathcal{F} dans cet ouvert, alors $f^*\Omega = 0$. Le courant positif fermé Φ est alors *invariant par \mathcal{F}* au sens suivant: $\Phi(\eta) = 0$ pour toute 2-forme η qui s'annule sur \mathcal{F} (i.e. qui s'annule en restriction aux feuilles de \mathcal{F}). En effet, pour une telle 2-forme on a $f^*\eta = 0$. Voyons de plus près ce que cela signifie. Soit $p \in X$ un point régulier de \mathcal{F} ; choisissons près de p des coordonnées locales (z_1, z_2) dans lesquelles $\mathcal{F} = \{dz_1 = 0\}$. Dans ces coordonnées Φ s'exprime (avec quelques abus de notations) comme $\sum_{j,k=1,2} A_{j,k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$,

où les $A_{j,k}$ sont des mesures; la condition de \mathcal{F} -invariance implique alors $A_{1,2} = A_{2,1} = A_{2,2} = 0$, et $d\Phi = 0$ implique que $A_{1,1}$ ne dépend pas de z_2, \bar{z}_2 et donc que $A_{1,1}$ engendre une *mesure transverse invariante* pour \mathcal{F} (ou, plus exactement, pour $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$). Voir [Su] pour plus de détails sur cette correspondance entre courants positifs fermés \mathcal{F} -invariants et mesures transverses \mathcal{F} -invariantes. On peut donc penser le support K de Φ comme une “lamination” (singulière), formée de certaines feuilles du feuilletage et équipée d’une mesure transverse qui permet d’intégrer les 2-formes le long de ces feuilles (en obtenant ainsi le courant Φ). On va résumer cela dans un lemme.

LEMME 2. *Le feuilletage $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ possède une mesure transverse invariante μ dont le support coïncide avec $K \cap (X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}))$. \square*

Si $p \in X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ est un atome de μ , la feuille de \mathcal{F} passant par p est nécessairement algébrique, i.e. son adhérence dans X est une courbe algébrique C_p . En effet, une telle feuille ne peut pas s’accumuler sur elle-même ou sur une autre feuille de $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$, puisque cela contredirait la finitude de la mesure transverse invariante. Donc la feuille passant par p est un sous-ensemble analytique de $X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, et les théorèmes classiques d’élimination des singularités garantissent que l’adhérence de la feuille dans X est encore analytique, donc une courbe algébrique. Le courant Φ “contient” alors le courant d’intégration sur C_p , avec poids égal à $\mu(p)$. Puisque \mathcal{F} a des feuilles non algébriques, le nombre de feuilles algébriques est fini, d’après un théorème classique de Darboux généralisé dans [Jo]. On peut donc décomposer Φ de la façon suivante :

$$\Phi = \Phi_{alg} + \Phi_{diff},$$

où $\Phi_{alg} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta_{C_j}$, $\lambda_j > 0$, C_j courbe algébrique \mathcal{F} -invariante, et Φ_{diff} est un courant positif fermé \mathcal{F} -invariant et dont la mesure transverse associée n’a pas d’atomes.

Soulignons que, même si $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ a une image transcendante, il peut bien arriver que Φ_{alg} soit non triviale. Par contre, nous ne connaissons pas d’exemples (mais il doit y en avoir) où la décomposition ci-dessus est non triviale, i.e. $\Phi_{alg} > 0$ et $\Phi_{diff} > 0$. Puisque Φ dépend de la suite $r_n \rightarrow +\infty$, on peut espérer obtenir l’annulation d’un des deux termes de la décomposition après avoir choisi une sous-suite $r_{n_k} \rightarrow +\infty$.

Terminons cette section par un exemple qui illustre la théorie précédente. Soit $X = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ et soit \mathcal{F} le feuilletage qui s’exprime dans la carte

affine $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \subset X$ par l'équation

$$w dz - \lambda z dw = 0,$$

où $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Les seules feuilles algébriques de \mathcal{F} sont les quatres droites

$$L_0 = \{z = 0\}, \quad L_\infty = \{z = \infty\}, \quad N_0 = \{w = 0\}, \quad N_\infty = \{w = \infty\},$$

sur lesquelles toute autre feuille s'accumule. La courbe entière

$$f: \mathbf{C} \rightarrow X \quad f(x) = (e^{\lambda x}, e^x)$$

est tangente à \mathcal{F} et son image est transcendante. On utilisera la forme kählérienne $\omega = \omega_1 + \omega_2$, où $\omega_1 = \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$ et $\omega_2 = \frac{i dw \wedge d\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}$. Les calculs explicites sont possibles mais ennuyeux; il est toutefois aisé de voir que, pour une constante convenable $c > 0$, on a pour $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{D(t)} f^* \omega_1 &= c |\lambda| t + o\left(\frac{1}{t}\right) \\ \int_{D(t)} f^* \omega_2 &= ct + o\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

et donc $T_{f,r}(\omega) = (1+|\lambda|)cr + o(1)$ pour $r \rightarrow +\infty$. La courbe réelle $f(\partial D(t))$ s'approche de plus en plus, pour $t \rightarrow +\infty$, de l'union T des quatre droites \mathcal{F} -invariantes. Donc si $\eta \in A^2(X)$ a son support disjoint de T on obtient que $\int_{D(t)} f^* \eta$ est constant pour t assez grand et par conséquent $T_{f,r}(\eta)$ a une croissance logarithmique en r . Cela signifie que si $\Phi \in A^{1,1}(X)'$ est un courant positif fermé dérivé de f on a $\Phi(\eta) = 0$ et donc $\text{Supp } \Phi \subset T$. Cela correspond au fait que, pour des raisons dynamiques évidentes, les seules mesures transverses invariantes sont celles concentrées sur T . On peut alors développer Φ sous la forme

$$\Phi = a_0 \delta_{L_0} + a_\infty \delta_{L_\infty} + b_0 \delta_{N_0} + b_\infty \delta_{N_\infty},$$

où $a_0, a_\infty, b_0, b_\infty$ sont des réels positifs. Puisque $T_{f,r}(\omega_1) = c |\lambda| r + o(1)$, on a nécessairement $\Phi(\omega_1) = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}$. D'autre part, $\delta_{L_0}(\omega_1) = \delta_{L_\infty}(\omega_1) = 0$, $\delta_{N_0}(\omega_1) = \delta_{N_\infty}(\omega_1) = 2\pi$, donc $2\pi(b_0 + b_\infty) = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}$. De façon analogue, avec ω_2 à la place de ω_1 , on arrive à $2\pi(a_0 + a_\infty) = \frac{1}{1+|\lambda|}$. Enfin, raisons de symétrie imposent $a_0 = a_\infty$ et $b_0 = b_\infty$, et donc Φ coïncide forcément avec le courant

$$\frac{1}{4\pi(1+|\lambda|)} (\delta_{L_0} + \delta_{L_\infty} + |\lambda| \delta_{N_0} + |\lambda| \delta_{N_\infty}).$$

À remarquer que le quotient entre le coefficient de δ_{N_0} et celui de δ_{L_0} est égal au quotient entre la valeur propre de \mathcal{F} en $(0, 0)$ le long de N_0 et celle le long de L_0 .

Si dans le même exemple on prend $\lambda \in \mathbf{R}$ (et $\lambda \notin \mathbf{Q}$ pour avoir des feuilles transcendentes) les feuilles de \mathcal{F} sont denses sur des hypersurfaces réelles et la dynamique de \mathcal{F} sur ces hypersurfaces ressemble à celle des feuilletages linéaires irrationnels des tores. Le courant Φ sera alors uniformément distribué sur une de ces hypersurfaces.

Enfin, on peut construire de nouveaux exemples à partir des précédents par des transformations birationnelles. On aura ainsi des exemples où la courbe entière passe une infinité de fois à travers une singularité du feuilletage.

2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE ET SES CONSÉQUENCES

On continue avec les hypothèses et les notations de la section précédente :

- X est une surface algébrique lisse ;
- \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe sur X , à singularités isolées ;
- $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ est une courbe entière non dégénérée et tangente à \mathcal{F} ;
- $\Phi \in A^{1,1}(X)'$ est un courant positif fermé associé à f .

En plus, on supposera que les singularités de \mathcal{F} sont *réduites* au sens de [Se] (voir aussi [CS]) : au voisinage de chaque point singulier, \mathcal{F} est engendré par un champ de vecteurs dont la partie linéaire a pour valeurs propres 1, λ , avec $\lambda \notin \mathbf{Q}^+$. Si $\lambda \neq 0$ le point singulier est *simple*, sinon c'est un *nœud-col*. Ainsi chaque singularité réduite a une *multiplicité* $d \geq 1$, et $d > 1$ si et seulement si la singularité est un nœud-col. Une *séparatrice* d'une singularité est une courbe analytique définie au voisinage de la singularité, tangente au feuilletage et passant par la singularité. On utilisera le fait qu'une singularité simple a exactement deux séparatrices (l'une transverse à l'autre), tandis qu'un nœud-col a une "séparatrice forte" tangente à l'espace propre de valeur propre 1 et, parfois, une "séparatrice faible" tangente à celui de valeur propre 0 [CS], [MR]. L'étude des feuilletages à singularités réduites est justifiée par le théorème de réduction des singularités de Seidenberg [Se] : tout feuilletage peut être transformé en un feuilletage à singularités réduites par une suite d'éclatements.

Du point de vue global, on peut associer à \mathcal{F} (et malgré ses singularités) un fibré tangent $T_{\mathcal{F}}$ et un fibré normal $N_{\mathcal{F}}$: dans le langage des diviseurs, $T_{\mathcal{F}}$ (resp. $N_{\mathcal{F}}^*$, dual de $N_{\mathcal{F}}$) est représenté par la différence entre le diviseur