

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FREE GROUP ACTING ON SZ^2 WITHOUT FIXED POINTS
Autor: Kenzi, Satô

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

have a common fixed point $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ in \mathbf{R}^2 and the subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ generated by

$$\begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$$

is free of rank 2 and all its elements distinct from the identity are hyperbolic. See [K] and the following calculations:

$$\begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = tu(tu^{-1})^3(tu)^2tu^{-1}tu,$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 22 & 13 \end{pmatrix} = tu^{-1}(tu)^3(tu^{-1})^2tutu^{-1},$$

where

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

with $\langle t, u \rangle / \{\pm 1\} \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$.

The referee suggested to the author that the following could be shown (without the axiom of choice).

COROLLARY. *There exists a subset E_1 of \mathbf{Z}^2 such that, for every finite subset F of \mathbf{Z}^2 , the symmetric difference of E_1 and F is congruent to E_1 relative to the group $\mathrm{SA}_2(\mathbf{Z})$.*

Proof. This is a consequence of our main result and of Theorem 2 in [My] ($S = \mathbf{Z}^2$, $G = \langle \zeta, \eta \rangle$, $M = \{\zeta\eta, \zeta^2\eta^2, \zeta^3\eta^3, \dots\}$, $\mathbf{F} = \{F \subseteq \mathbf{Z}^2 \mid F \text{ is finite}\}$). \square

REFERENCES

- [BT] BANACH, S. and A. TARSKI. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math.* 6 (1924), 244–277.
- [B] BOREL, A. On free subgroups of semi-simple groups. *L'Enseignement Math.* 29 (1983), 151–164.
- [D] DEKKER, Th. J. Decompositions of sets and spaces I. *Indag. Math.* 18 (1956), 581–589.
- [DS] DELIGNE, P. and D. SULLIVAN. Division algebras and the Hausdorff-Banach-Tarski paradox. *L'Enseignement Math.* 29 (1983), 145–150.
- [K] KUROSH, A. G. *The Theory of Groups*, vol. 2. Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

- [Ma] MAGNUS, W. Rational representations of Fuchsian groups and non-parabolic subgroups of the modular group. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II* (1973), 179–189.
- [MKS] MAGNUS, W., A. KARASS and D. SOLITAR. *Combinatorial Group Theory*. Interscience, New York, 1966.
- [My] MYCIELSKI, J. About sets invariant with respect to denumerable changes. *Fund. Math.* 45 (1958), 296–305.
- [MW] MYCIELSKI, J. and S. WAGON. Large free groups of isometries and their geometrical uses. *L'Enseignement Math.* 30 (1984), 247–267.
- [N] NEUMANN, B. Über ein gruppentheoretisch-arithmetisches Problem. *Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Phys.-Math. Klasse X* (1933), 427–444.
- [S0] SATÔ, K. A Hausdorff decomposition on a countable subset of S^2 without the axiom of choice. *Math. Japon.* 44 (1996), 307–312.
- [S1] ——— A free group acting without fixed points on the rational unit sphere. *Fund. Math.* 148 (1995), 63–69.
- [S2] ——— A free group of rotations with rational entries on the 3-dimensional unit sphere. *Nihonkai Math. J.* 8 (1997), 91–94.
- [S3] ——— Free groups acting without fixed points on rational spheres. *Acta Arith.* 85 (1998), 135–140.
- [Ś] ŚWIERCZKOWSKI, S. On a free group of rotations of the Euclidean space. *Indag. Math.* 20 (1958), 376–378.
- [V] VON NEUMANN, J. Zur allgemeinen Theorie des Maßes. *Fund. Math.* 13 (1929), 73–116.
- [W] WAGON, S. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1985.

(Reçu le 27 octobre 1998)

Satô Kenzi

Department of Mathematics
 Faculty of Engineering
 Tamagawa University
 6-1-1, Tamagawa-Gakuen, Machida
 Tokyo 194-8610
 Japan
e-mail : kenzi@eng.tamagawa.ac.jp