

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FREE GROUP ACTING ON SZ^2 WITHOUT FIXED POINTS
Autor: Kenzi, Satô
Kurzfassung
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A FREE GROUP ACTING ON \mathbf{Z}^2 WITHOUT FIXED POINTS

by SATÔ Kenzi

ABSTRACT. The group of all orientation-preserving affine transformations of the plane has a non-abelian free subgroup which stabilizes \mathbf{Z}^2 and which acts on \mathbf{Z}^2 without non-trivial fixed points.

INTRODUCTION

Let G be a group acting on a non-empty set X . The following two conditions are known to be equivalent (see [D], and Theorems 4.5 and 4.8 in [W]):

- (a) *there exists a non-abelian free subgroup of G whose action on X is locally commutative;*
- (b) *there exists a G -paradoxical decomposition of X using 4 pieces, namely a partition of X in parts P_0, P_1, P_2, P_3 and elements $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in G such that*

$$X = P_0 \sqcup P_1 \sqcup P_2 \sqcup P_3 = \alpha_0(P_0) \sqcup \alpha_1(P_1) = \alpha_2(P_2) \sqcup \alpha_3(P_3).$$

Moreover, in the situation of (b), it can be shown that the subgroup of G generated by $\alpha_0^{-1}\alpha_1$ and $\alpha_2^{-1}\alpha_3$ is free of rank 2. (The symbol \sqcup denotes disjoint union. Recall that an action of a group H on X is *locally commutative* if the stabilizer $\{h \in H \mid h(x) = x\}$ is commutative for all $x \in X$, i.e. if two elements of H which have a common fixed point commute; trivial examples of locally commutative actions are actions *without non-trivial fixed points*, for which $\{h \in H \mid h(x) = x\}$ is reduced to $\{1\}$ for all $x \in X$.)