

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PUZZLES DE YOCCOZ POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE
Autor: ROESCH, Pascale
Kapitel: 1.4 Présentation des tableaux et de leurs propriétés
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-64443>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La proposition qui suit (version triviale du théorème de Yoccoz) règle le cas où le point critique x_0 n'est pas dans $K(f)$, moyennant un rétrécissement de X' . En outre elle donne une idée sur la manière dont on peut appliquer le lemme ci-dessus et utiliser la dynamique pour étudier la série $\sum_i \text{mod } A_i(x)$.

PROPOSITION 1.14. *Soit $f: X' \rightarrow X$ une application à allure rationnelle n'ayant aucun point critique et soit x un point de $K(f)$. Si un graphe admissible Γ bague x infiniment, l'impression $\text{Imp}(x)$ est réduite au point x .*

Preuve. Soit \mathcal{A} l'ensemble des anneaux de la forme $P_0 \setminus \bar{P}_1$, où P_0, P_1 sont des pièces du puzzle de profondeurs respectives 0 et 1. Comme le graphe Γ est fini, \mathcal{A} est un ensemble fini. Par ailleurs, comme f n'a aucun point critique, f^i induit, pour tout $i \geq 0$, un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_i(x)$ sur un anneau élément de \mathcal{A} . Il en résulte d'une part qu'il existe une infinité d'entiers i pour lesquels les images $f^i(A_i(x))$ sont égales à un même anneau $A \in \mathcal{A}$, d'autre part que ces anneaux $A_i(x)$ ont tous le même module que A . Par suite, la série $\sum_i \text{mod } A_i(x)$ diverge et le lemme 1.13 en tire la conclusion. \square

Cette preuve s'effondre évidemment dès que f a un point critique x_0 dans $K(f)$. Quand $P_i(x)$ contient x_0 , on peut seulement minorer le module de $A_i(x)$ par $(1/2) \text{mod } A_{i-1}(f(x))$ (voir le lemme 1.17). La comparaison de $\text{mod } A_i(x)$ avec le module des anneaux de profondeur 0 dépend alors du nombre d'images itérées de $P_i(x)$ qui contiennent x_0 et, en fin de compte, de la récurrence du point critique x_0 . Si celle-ci n'est pas trop forte, on peut encore trouver une infinité d'anneaux $A_i(x)$ ayant un même module. Sinon, une étude plus approfondie de la combinatoire est nécessaire.

1.4 PRÉSENTATION DES TABLEAUX ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Soit Γ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle simple $f: X' \rightarrow X$ et x un point de $K(f)$ dont l'orbite positive évite Γ .

DÉFINITION 1.15. Le *tableau* $T(x)$ du point x est la matrice de pièces, infinie vers la droite et le bas, dont la j -ième colonne, $j \geq 0$, donne en descendant les éléments du bout de $f^j(x)$. Autrement dit, l'élément de la j -ième colonne et i -ième ligne (en comptant vers le bas) est la pièce $T(x)_{i,j} = P_i(f^j(x))$, $i, j \geq 0$.

Ainsi, pour tous $i \geq 1, j \geq 0$, l'inclusion $P_i(f^j(x)) \rightarrow P_{i-1}(f^j(x))$

donne une flèche verticale montante sur $T(x)$, tandis que l'application $P_i(f^j(x)) \rightarrow P_{i-1}(f^{j+1}(x))$ induite par f fournit une flèche diagonale montante. En outre, toutes ces flèches commutent.

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0(x) & & P_0(f(x)) & & P_0(f^2(x)) & & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_1(x) & \circlearrowleft & P_1(f(x)) & \circlearrowleft & P_1(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_2(x) & \circlearrowleft & P_2(f(x)) & \circlearrowleft & P_2(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots \\
 P_i(x) & \circlearrowleft & P_i(f(x)) & \circlearrowleft & P_i(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_{i+1}(x) & \circlearrowleft & P_{i+1}(f(x)) & \circlearrowleft & P_{i+1}(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots
 \end{array}$$

Les diagonales sud-ouest—nord-est (le long desquelles agit la dynamique f) seront appelées *diagonales du tableau* $T(x)$. On appellera aussi *double diagonale* toute paire de diagonales consécutives.

DÉFINITION 1.16. On appelle *anneau de profondeur i du tableau* $T(x)$ tout anneau, éventuellement dégénéré, de la forme $A_i(y) = P_i(y) \setminus \bar{P}_{i+1}(y)$, où y est dans l'orbite positive de x .

Un tel anneau est dit *critique* (respectivement *non-critique*, respectivement *semi-critique*) si le point critique x_0 se trouve dans $P_{i+1}(y)$ (respectivement hors de $P_i(y)$, respectivement dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$).

LEMME 1.17.

1) *Le caractère dégénéré ou non des anneaux du tableau est constant le long des doubles diagonales.*

2) *L'image par f de l'anneau $A_i(y) = P_i(y) \setminus \bar{P}_{i+1}(y)$, $i > 0$, est l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ si et seulement si l'anneau $A_i(y)$ n'est pas semi-critique.*

Si $A_i(y)$ est critique (resp. non-critique), f induit un revêtement double non ramifié (resp. un homéomorphisme) de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$ et $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = 2 \text{ mod } A_i(y)$ (resp. $= \text{mod } A_i(y)$).

Dans le cas où $A_i(y)$ est semi-critique, bien que $A_{i-1}(f(y))$ ne soit pas l'image $f(A_i(y))$, on a la comparaison

$$\text{mod } A_{i-1}(f(y)) \leq 2 \text{ mod } A_i(y).$$

Preuve. 1) Si $A_i(y)$ est dégénéré, $A_{i-1}(f(y))$ l'est aussi. En effet, comme f induit une application propre de $P_i(y)$ sur $P_{i-1}(f(y))$, un point commun à $\partial P_i(y)$ et $\partial P_{i+1}(y)$ va sur un point commun à $\partial P_{i-1}(f(y))$ et $\partial P_i(f(y))$.

De plus, comme f est ouverte, le bord de $P_i(f(y)) = f(P_{i+1}(y))$ est entièrement inclus dans $P_{i-1}(f(y)) = f(P_i(y))$. Par suite, si $A_i(y)$ n'est pas dégénéré, $A_{i-1}(f(y))$ ne l'est pas non plus.

2) D'après le lemme 1.8, pour tout entier $k > 0$, f induit une application $f_k: P_k(y) \rightarrow P_{k-1}(f(y))$ qui est soit un homéomorphisme soit un revêtement double ramifié.

i) Si x_0 est dans $P_{i+1}(y)$, les applications f_i et f_{i+1} sont des revêtements doubles ramifiés en x_0 . Par suite, $f^{-1}(f(P_{i+1}(y))) \cap P_i(y) = P_{i+1}(y)$ et l'anneau image $f(A_i(y))$ coïncide donc avec $A_{i-1}(f(y))$. De plus, f induit un revêtement double non ramifié de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$.

Si $A_{i-1}(f(y))$ est non dégénéré, l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ est conforme à un anneau standard A_{r^2} et l'application $f: A_i(y) \rightarrow A_{i-1}(f(y)) \simeq A_{r^2}$ se relève en un homéomorphisme conforme $A_i(y) \rightarrow A_r$ par le revêtement $A_r \rightarrow A_{r^2}$, $z \mapsto z^2$. Par suite, $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = -2 \log r / (2\pi)$ et donc $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = 2 \text{ mod } A_i(y)$.

ii) Si x_0 n'est pas dans $P_i(y)$, les applications f_i et f_{i+1} sont des homéomorphismes conformes. Par suite, f induit un homéomorphisme conforme de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$ et $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = \text{mod } A_i(y)$.

iii) Si x_0 est dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$, l'application f_i est un revêtement double ramifié tandis que f_{i+1} est un homéomorphisme. Par suite, l'intersection $f^{-1}(f(P_{i+1}(y))) \cap P_i(y)$ est formée de deux composantes connexes, $P_{i+1}(y)$ et une autre composante qu'on note Q . L'image $f(A_i(y))$ contient alors $f(Q) = f(P_{i+1}(y))$. Ainsi, $f(A_i(y)) = f(P_i(y))$.

Pour comparer les modules, on choisit un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ sur un anneau standard A_r . On considère dans A_r le cercle de rayon R passant par le point correspondant à la valeur critique $f(x_0)$. Ramené dans l'anneau $A_{i-1}(f(y))$, ce cercle donne une courbe de Jordan Γ qui entoure $f(P_{i+1}(y))$ et passe par la valeur critique $f(x_0)$. L'image réciproque de Γ par f est un huit que l'on décompose en ses boucles Γ_1 et Γ_2 entourant respectivement $P_{i+1}(y)$ et Q et se touchant au point critique. L'application f envoie alors l'anneau A compris entre $\partial P_i(y)$ et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sur l'anneau compris entre $\partial P_{i-1}(f(y))$ et Γ avec un degré 2. Par suite, $\text{mod } A = -\frac{1}{2} \frac{\log R}{2\pi}$. De plus, le disque bordé par Γ_1 et contenant $P_{i+1}(y)$ est conforme au disque bordé par Γ et contenant $P_i(f(y))$. Par suite, l'anneau A' compris entre Γ_1

et $\partial P_{i+1}(y)$ est conforme à l'anneau compris entre Γ et $\partial P_i(f(y))$, donc $\text{mod } A' = -\frac{\log(r/R)}{2\pi}$.

Finalement, les anneaux A et A' sont disjoints et homotopes à l'anneau $A_i(y)$, de sorte que l'inégalité de Grötzsch donne

$$\text{mod } A_i(y) \geq -\frac{1}{2} \frac{\log R}{2\pi} - \frac{\log(r/R)}{2\pi} \geq -\frac{1}{2} \frac{\log r}{2\pi} = \frac{1}{2} \text{mod } A_{i-1}(f(y)).$$

□

LEMME 1.18. *Quelques propriétés du tableau $T(x)$.*

T1) Si le terme $T(x)_{i,j}$ est critique (c'est-à-dire contient le point critique x_0), il en est de même de tous les termes situés au-dessus, i.e. du type $T(x)_{k,j}$ avec $k \leq i$.

T2) Si le terme $T(x)_{m,n}$ est critique, le triangle de $T(x)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de ce point est une copie du triangle de $T(x_0)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de $T(x_0)_{m,0}$; autrement dit,

$$T(x)_{m-i,n+j} = T(x_0)_{m-i,j} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq i \leq m.$$

T3) On suppose que $T(x)_{m,n}$ et $T(x)_{m-i,n+i}$, $i > 0$, sont deux termes critiques et que, sur la diagonale qui les joint, aucun terme entre eux n'est critique. Si l'anneau $A_m(f^n(x))$ est semi-critique, il en est de même de l'anneau $A_{m-i}(f^{n+i}(x))$ à condition que l'anneau $A_{m-i}(f^i(x_0))$ — du tableau $T(x_0)$ — soit critique.

Illustration de ces propriétés (les symboles c et \emptyset indiquent les pièces respectivement critiques et non-critiques).

c	c	c	c
c	\emptyset	c	c	\emptyset	\emptyset
\vdots	\emptyset	\vdots	\emptyset	...	
\vdots	\emptyset	\vdots	\emptyset			
c	\emptyset	c	\emptyset			
c	\emptyset			
<hr/>						<hr/>					
tableau critique: $T(x_0)$						tableau de x : $T(x)$					

Preuve. T1) provient de l'inclusion $T(x)_{i,j} \subset T(x)_{k,j}$.

T2) provient de l'unicité de la pièce de profondeur n contenant le point critique et de l'action diagonale de f .

T3) D'après T2) et T1), l'application f^i induit des revêtements doubles ramifiés de $T(x_0)_{m,0}$ sur $T(x_0)_{m-i,i}$ et de $T(x_0)_{m+1,0}$ sur $T(x_0)_{m-i+1,i}$. Par suite, $T(x_0)_{m-i+1,i}$ a une seule préimage par f^i dans $T(x_0)_{m,0}$, à savoir $T(x_0)_{m+1,0}$, ce qui empêche $T(x)_{m-i+1,n+i}$ d'être critique. \square

1.5 RÉDUCTION AU CAS D'UN TABLEAU CRITIQUE RÉCURRENT PERSISTANT

Dans toute cette partie, on se place dans les hypothèses du théorème 1.10. En d'autres termes, *on suppose que le point critique x_0 est dans $K(f)$* (le cas $x_0 \notin K(f)$ est réglé par la proposition 1.14), *on se donne un point x de $K(f)$ et un graphe admissible Γ qui bague le point critique x_0 et bague infiniment le point x .*

En suivant le plan exposé à la fin de la partie 1.3, on cherche à évaluer le module des anneaux non dégénérés qui baguent x . Pour chaque anneau, l'estimation dépend du nombre d'images itérées qui sont critiques ou semi-critiques. Ceci conduit à utiliser la fonction τ de Yoccoz et à regarder le type de récurrence des tableaux.

DÉFINITION 1.19. On appelle *fonction τ de Yoccoz* la fonction de \mathbf{N} dans $\mathbf{N} \cup \{-1\}$ définie comme suit : pour tout entier $n \geq 0$, $\tau(n)$ est la profondeur du premier itéré (strict) de la pièce $P_n(x)$ qui contient le point critique x_0 ; si cet itéré n'existe pas, on pose $\tau(n) = -1$. Autrement dit, si $\Sigma(n)$ désigne l'ensemble

$$\Sigma(n) = \{i \in [0, n-1] \mid x_0 \in P_i(f^{n-i}(x))\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

la fonction τ est donnée par

$$\tau(n) = \begin{cases} \sup \Sigma(n) & \text{si } \Sigma(n) \neq \emptyset, \\ -1 & \text{si } \Sigma(n) = \emptyset. \end{cases}$$

En particulier, $\tau(n) < n$ et, comme $P_{i+1}(f^{n-i}(x))$ est contenu dans $P_i(f^{n-i}(x))$ pour tout $i \geq 0$, $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$.

REMARQUE 1.20. Sur le tableau $T(x)$, la valeur $\tau(n)$ se lit comme la profondeur de la première pièce critique qu'on rencontre strictement après $T(x)_{n,0}$ sur la diagonale issue de ce terme.

Si x n'est autre que le point critique x_0 , alors $\tau(n)$ est la profondeur du premier retour de x_0 dans une pièce du bout critique.